

Úhel Mezi Vektory V Rovině

Obsah

[**Úvod**](#_heading=h.gjdgxs)  **3**

[Úhel mezi dvěma vektory pomocí bodového součinu](#_heading=h.int86pskt9cv)  **5**

[Úhel mezi dvěma vektory pomocí křížového součinu](#_heading=h.k6vk1iy0lax6)  **6**

[**Vyřešené problémy**](#_heading=h.xs1kohmnrd88)  **9**

[Příklad 1](#_heading=h.1fob9te)  9

[Příklad 2](#_heading=h.190brkc6j781)  10

[Příklad 3](#_heading=h.erdhqpgx4jq6)  12

[**Národní evaluační cvičení**](#_heading=h.drhckcekq2u6)  **13**

# Úvod

Vektory mají velký význam ve vektorové geometrii a fyzice. Zejména směr vektorů a úhly, pod kterými jsou orientovány, jsou rozhodující pro určení účinku, který bude mít kombinace těchto vektorů.

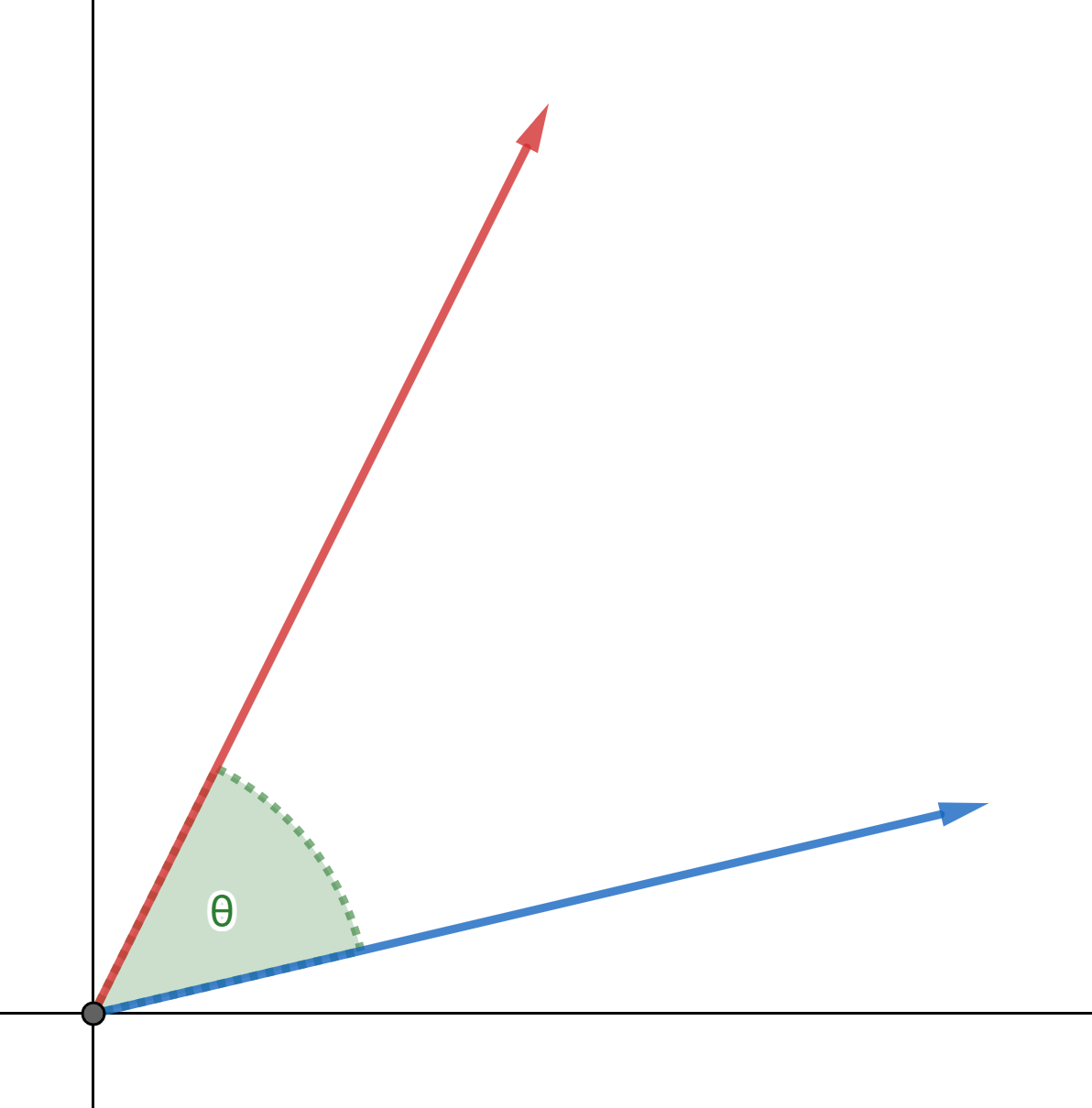
Pokud například studujeme pohyb fotbalového míče během hry, jeho polohu vzhledem ke středu hřiště lze popsat polohovým vektorem a pohyb vektorem rychlosti, jehož délka udává rychlost míče, takže bude tím delší, čím rychleji míč půjde. Směr vektoru rychlosti vysvětluje směr pohybu míče.

Někdy máme co do činění se dvěma vektory působícími na stejný objekt, takže úhel vektorů je kritický. V reálném světě je každý systém vystaven několika vektorům kombinovaným dohromady.

Pokud jsou v rovině dva vektory tak, že konce obou vektorů jsou spojeny, pak můžeme definovat úhel mezi nimi jako:

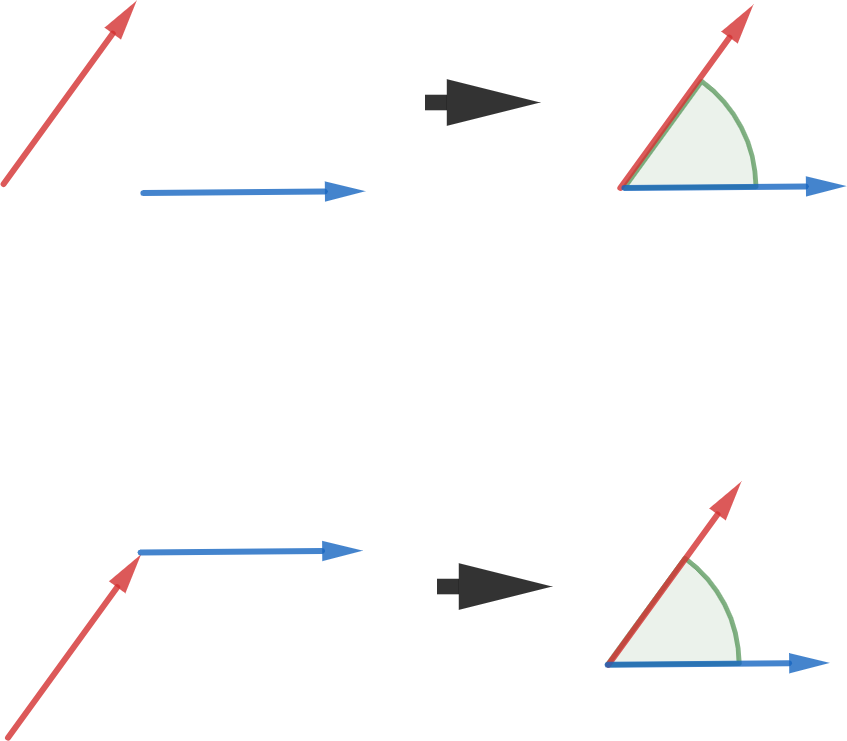
*"Úhel mezi dvěma vektory je nejkratší úhel, pod kterým je kterýkoli ze dvou vektorů otočen kolem druhého vektoru tak, že oba vektory mají stejný směr."*

Diskuse o vektorových úhlech se zaměřuje na nalezení nejkratšího úhlu mezi vektory. Tím se zaměří na úhel mezi dvěma vektory ve standardní poloze.   
  
*„Vektor je označen za standardní, pokud je jeho počátečním bodem počátek (0, 0).*

**

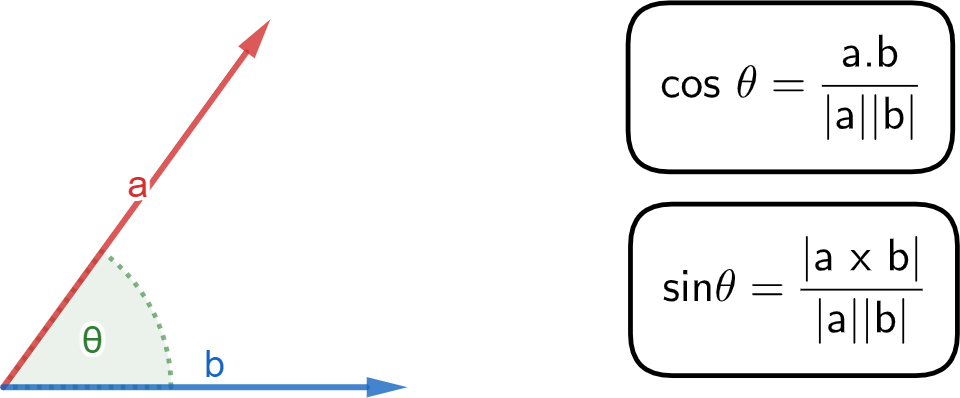
Jinými slovy, úhel mezi dvěma vektory je úhel mezi jejich ocasy. Všimněte si, že úhel mezi dvěma vektory je vždy mezi 0° a 180°.

Pokud vektory nejsou spojeny tail-to-tail, musíme je spojit posunutím jednoho z vektorů.



Pomocí vektorového násobení je možné najít úhel mezi dvěma vektory. K řešení vektorového násobení lze použít dvě různé metody: skalární součin a křížový součin.

Skalárním součinem dvou vektorů se získá skalární veličina. Na druhou stranu, jak název napovídá, vektorový součin (nebo křížový součin) mezi dvěma vektory vytváří vektorovou veličinu.



# 

# Úhel mezi dvěma vektory pomocí bodového součinu

Uvažujme dva vektory a a b oddělené nějakým úhlem θ. Vzorec bodového součinu je:

kde **ab** je bodový součin dvou vektorů. |a| a |b| jsou velikosti vektorů **a** a **b** a θ je úhel mezi nimi.   
Předchozí vzorec říká, že bodový součin dvou vektorů a a b se rovná součinu jejich velikostí vynásobených kosinusem úhlu.   
Vycházíme tedy z definice bodového součinu, abychom našli hodnotu úhlu.   
Začněme izolací kosinu:

Nakonec, abychom našli úhel mezi dvěma vektory, a a b, vyřešíme úhel θ,

Zaměřme se na bodový součin, za tímto účelem uvažujme dva vektory **a** a **b**

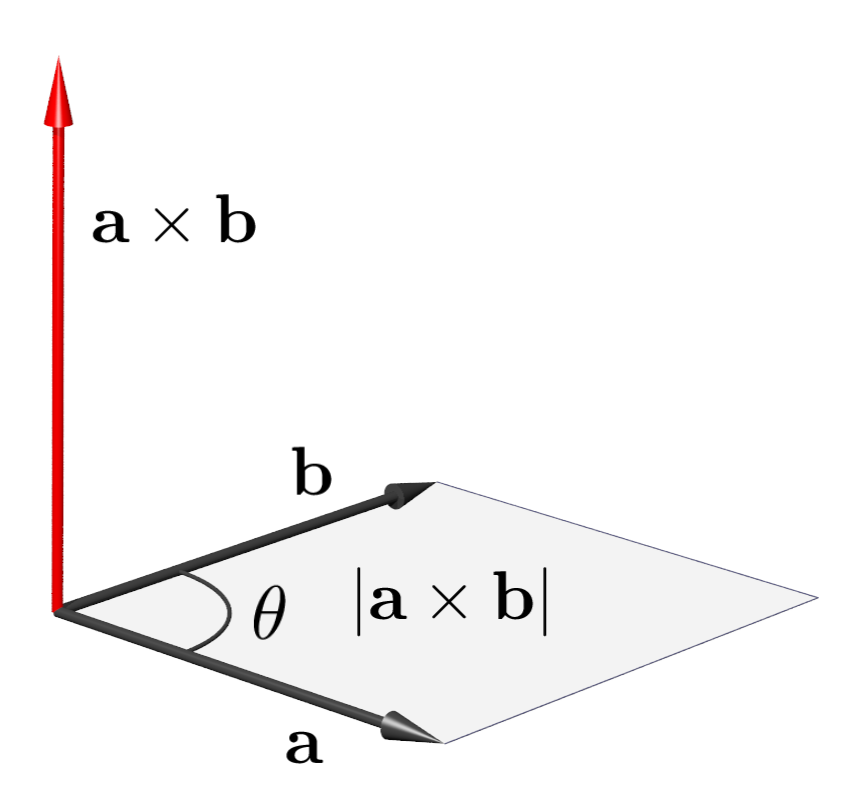
Potom je bodový součin mezi dvěma vektory **a** a **b** dán jako:

**. = +**

# Úhel mezi dvěma vektory pomocí křížového součinu

Další metodou hledání úhlu mezi dvěma vektory je křížový součin.   
Křížový součin je definován jako:

*„Vektor, který je kolmý k vektorům i směru, je dán pravidlem pravé ruky. “*

**

Vzorec křížového součinu je:

Kde **θ** je úhel mezi dvěma vektory, |a| a |b| jsou velikosti dvou vektorů **a** a **b** a **n** je jednotkový vektor kolmý k rovině obsahující **a** a **b** . Jeho směr je dán pravidlem pravé ruky.

Abychom to vyřešili pro θ, vezměme velikost obou členů:

Ale protože n je jednotkový vektor, jeho velikost je 1. Takže dostáváme:

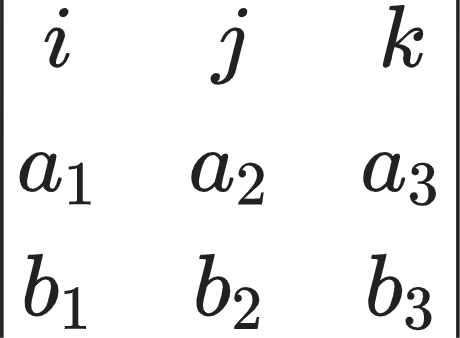
Pojďme izolovat sin θ , abychom našli úhel mezi těmito vektory

Nakonec můžeme získat úhel jako:

Zaměřme se na křížový produkt. Protože budeme používat křížový součin, musíme vzít v úvahu i třetí rozměr, protože křížový součin bude vektor kolmý k rovině obsahující a a b (takže nezůstane v jejich stejné rovině).

Obecně řečeno, můžeme si vzít jako příklad dva trojrozměrné vektory a a b: jako např

Křížový součin lze vyjádřit jako determinant matice



kde je pozitivně orientovaný ortonormální základ.

Výpočet determinantu, který získáme

takže dostaneme následující vektor

V naší případové studii, protože uvažujeme úhel mezi vektory v rovině xy, můžeme zjednodušit zápis **a** a **b** nastavením jejich třetí složky na 0, což z nich udělá dvourozměrné vektory. Mějte na paměti, že jako výsledek křížových součinů stále získáme kolmý vektor, který bude kolmý k rovině xy obsahující **a** a **b** .

Pokud přepočítáme předchozí vzorce uvažující **a** a **b** jako patřící do roviny xy (takže s ), dostaneme:

# Vyřešené problémy

## Příklad 1

*Úkol:*

Najděte úhel mezi vektory **a** = <1, 2> **ab** = <-2, -1> pomocí **bodového součinu** .

*Řešení:*

Nechť θ je úhel mezi vektory a a b.

Najděte úhel θ mezi vektory pomocí bodového součinu.

Abychom mohli vzorec použít , musíme vypočítat bodový součin a velikosti obou vektorů.

Nyní můžeme vypočítat úhel jako:

**143,13°**

## Příklad 2

*Úkol:*

Najděte úhel mezi vektory **a** = <1, 2> **ab** = <-2, -1> pomocí **křížového součinu** .

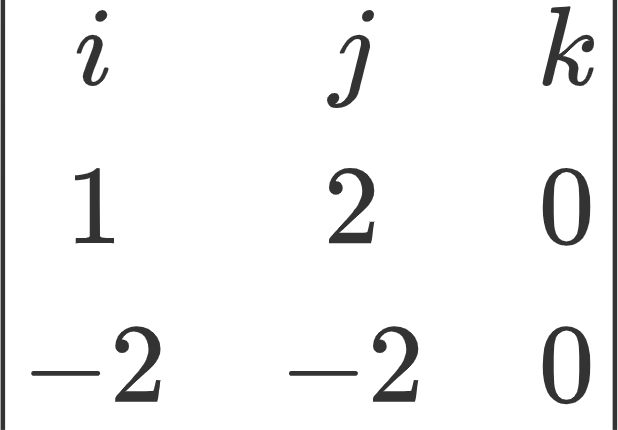
*Řešení:*

Nechť θ je úhel mezi a a b. Najděte úhel θ mezi vektory pomocí křížového součinu.

Protože budeme používat křížový součin, musíme vzít v úvahu třetí dimenzi, takže musíme rozšířit naše vektory na třetí dimenzi.

Aktualizujte náš zápis a a b:

Vypočítejme křížový **součin aab** .



Nyní zjistíme jeho velikost.

Nyní chceme pomocí vzorce získat hodnotu úhlu

Pak dostaneme

Dostaneme θ ≈ **36,87 (nebo) 143,13°** (= 180 - 36,87) (protože [sinus](https://www.cuemath.com/trigonometry/sine-function/) je kladný i ve druhém kvadrantu).

## Příklad 3

*Úkol:*

Najděte úhel mezi vektory **a** = <0, 5> **ab** = <2, 0> pomocí **bodového součinu** .

*Řešení:*

Nechť θ je úhel mezi vektory a a b.

Najděte úhel θ mezi vektory pomocí bodového součinu.

Abychom mohli vzorec použít , musíme vypočítat bodový součin a velikosti obou vektorů.

Nyní můžeme vypočítat úhel jako:

**90°**

*poznámky* :

Existuje několik úvah, které lze udělat pro urychlení dosahu tohoto řešení.   
Za prvé, výpočet a lze zjednodušit, protože se jedná o jednorozměrné vektory (jedna z jejich složek je 0), takže jejich modulo je rovno jejich ne nulové složce.

Navíc výpočet a , i když je jednoduchý, není vůbec nutný. Protože jsme zjistili, že se rovná 0 a toto bude čitatel argumentu arccos, není nutné hodnotit i jmenovatele.

Ale když půjdeme dále, toto cvičení by se dalo vyřešit bez jakýchkoli výpočtů, ale pouze s geometrickými úvahami. Protože **a** je vertikální vektor (jeho složka x je 0) a **b** je horizontální vektor (jeho složka y je 0), můžeme usuzovat, že se jedná o ortogonální vektory, to znamená, že úhel mezi nimi je 90°.

# Národní evaluační cvičení

(Maturitní Zkouška - Itálie:

<https://drive.google.com/file/d/16bxAx7d0ts5zgr3P62qzGu0ZPoZ2aywl/view?usp=sharing>)

PROBLÉM 1

Uvažujme trojúhelníky, jejichž základna je AB = 1 a jejichž vrchol C se mění tak, že úhel C Aˆ B je

udržuje dvojnásobný úhel A Bˆ C .

1. S odkazem na rovinu na vhodný souřadnicový systém určete rovnici místa geometrického místa γ popsaného C.

2. Představte γ, samozřejmě s přihlédnutím k předepsaným geometrickým podmínkám.

3. Určete amplitudu úhlu A Bˆ C, který tvoří součet druhých mocnin výšek vůči stranám AC a BC, a pomocí kalkulačky dejte jeho hodnotu aproximovanou ve stupních a prvočíslech (sexagesimální) .

4. Dokažte, že A Bˆ C = 36° pak AC=