****

**Funkce prvního stupně a**

**funkce druhého stupně**

Školní třída: K9

**Obsah**

[FUNKCE PRVNÍHO STUPNĚ 3](#_Toc125567795)

[Definice 3](#_Toc125567796)

[Proč "funkce prvního stupně"? 4](#_Toc125567797)

[Vlastnosti funkce prvního stupně 4](#_Toc125567798)

[Monotónnost funkce prvního stupně 6](#_Toc125567799)

[*Poznámky* 7](#_Toc125567800)

[Znaménko funkce prvního stupně 8](#_Toc125567801)

[Hodnoty funkce prvního stupně 8](#_Toc125567802)

[Výměnný bod 10](#_Toc125567803)

[Praktické příklady 11](#_Toc125567804)

[Najděte znaménko pro následující funkce: 11](#_Toc125567805)

[Nerovnosti prvního stupně 12](#_Toc125567806)

[Jak to počítáme? 12](#_Toc125567807)

[II STUPEŇ FUNKCE 17](#_Toc125567808)

[Definice funkce druhého stupně 17](#_Toc125567809)

[Grafické znázornění funkce druhého stupně 17](#_Toc125567810)

[Minimum a maximum funkce druhého stupně. Obraz funkce druhého stupně. 18](#_Toc125567811)

[Monotonia functiei de gradul II 19](#_Toc125567812)

[Forma canonica a functiei de gradul II 19](#_Toc125567813)

[Pozitia parabolei fata de axa Ox. Intersectia graficului cu axele de coordonate. Semnul functiei de gradul II 19](#_Toc125567814)

[Vztahy mezi kořeny a koeficienty (Vièteho vztahy). Lineární tvar funkce druhého stupně. 22](#_Toc125567815)

[*Nerovnosti tvaru ax2 +bx+c* 0 (,,), studované na nebo na intervalech reálných čísel. 23](#_Toc125567816)

[*Soustavy nerovnic druhého stupně studované na intervalech reálných čísel nebo na nich* 23](#_Toc125567817)

[Soustavy rovnic druhého stupně 24](#_Toc125567818)

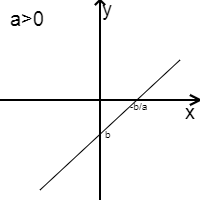
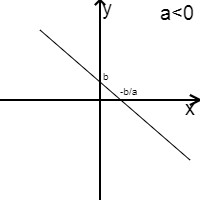
[Cvičení 26](#_Toc125567819)

# **FUNKCE PRVNÍHO STUPNĚ**

**Definice**

Funkce f:R→R,f(x)=ax+b,a,b∈R,a≠0 se nazývá funkce prvního stupně.

Geometrickým znázorněním grafu funkce prvního stupně je přímka.

Pokud a>0, je funkce striktně rostoucí, a pokud a<0, je funkce striktně klesající.

Funkce prvního stupně je obyčejná funkce, která má tvar:

f(x)=a⋅x+bf(x)=a⋅x+b, kde a a b jsou dvě reálná čísla.

Nyní by bylo dobré, kdybychom měli a≠0a≠0, protože kdyby to bylo 00, pak bychom měli pouze konstantní funkci ve tvaru f(x)=bf(x)=b, která vrací vždy stejnou hodnotu.

Příklady funkcí prvního stupně jsou:









## Proč "funkce prvního stupně"?

Vše se odvíjí od toho, jakou má x sílu. V našem případě je to mocnina 1, tedy



K funkci prvního stupně je také připojena rovnice:



Například k následujícím funkcím je připojena rovnice:

 má ecuation 

 bude mít výpočet , kde a je 

Funkce je funkce prvního stupně s koeficienty .

Funkce je lineární funkce s .

Funkce je konstantní funkce, když 

## Vlastnosti funkce prvního stupně

Funkce prvního stupně je nakonec lineární funkcí. To znamená, že je znázorněna přímkou a že si dokonce vypůjčuje vlastnosti takové funkce. Mezi které patří::

Grafem funkce prvního stupně je přímka, která má sklon, který můžeme vypočítat.

Pro rovnici , vzorec pro (sklon doprava) je:



A v případě funkce neuděláme nic jiného, než že ji nahradíme  . Rovnice přímky pro funkci prvního stupně se tedy stane:



Sklon přímky je ve skutečnosti koeficient x, tj. a, z obecného tvaru funkce. 

1. Souřadnice bodu na pravé straně funkce představují také řešení rovnice připojené k funkci.
2. Jak je obvyklé, řešení takovéto funkce , představuje souřadnice bodu na grafu funkce. To znamená, že tato čísla představují také řešení rovnice připojené k funkci.
3. Přesněji řečeno, máme-li funkci a vezmeme-li za x hodnotu, řekněme , pak bod bude patřit do grafu funkce a bude také řešením rovnice 
4. Chceme-li znázornit funkci prvního stupně, musíme najít průsečík grafu s osami.

Protože graf této funkce je přímka, potřebujeme ke správnému zobrazení 2 body. A nejjednodušší body, které lze zjistit, jsou průsečíky grafu s osami.

Například pro budeme mít:

* průsečíku s osou y, když ,

význam a budeme mít bod 

* a průsečík s osou x, když . 

konkrétně se ukázalo, že a stále máme bod.

# **Monotónnost funkce prvního stupně**

Když se chceme o funkci dozvědět více, je důležité si všimnout její monotónnosti.

To znamená, zda je funkce rostoucí nebo klesající.

Monotónnost funkce prvního stupně je dána koeficientem x, a to:

* Když a>0, pak je funkce rostoucí
* Nebo když a<0, je funkce klesající ↘

Pokud si představíme f(x) jako rovnici přímky, pak aa bude sklon přímky. Přesněji řečeno, a je to m v obecném tvaru rovnice přímky:

f(x)=a⋅x+b nebo 

y=m⋅x+n nebo 

A víme, že pokud je sklon pravé strany kladné číslo, pak je pravá strana rostoucí (tj. směřuje do pravého horního rohu).

***Demonstrace***

Pro testování monotónnosti funkce se použije rychlost růstu (poklesu) funkce f,

 pro 

Pokud , pak je f striktně rostoucí, a pokud , pak je f striktně klesající.

### ***Poznámky***

1. **Znaménko a určuje monotónnost funkce prvního stupně.**
2. Výpočet představuje sklonovou přímku (šikmá přímka, která není rovnoběžná s osou Ox ani s osou Oy).

***Cvičení:***

Uveďte monotónnost následujících funkcí:

1. f(x)=4⋅x

A: funkce je rostoucí, protože a>0, konkrétně a=4

2. f(x)=3-5⋅x

A: funkce je klesající, protože a<0a<0, přesněji a=-5

3. f(x)=(m-1)⋅x+3

Odpověď: V tomto případě vše závisí na m, přesněji řečeno na tom, kdy je m-1 menší nebo větší než 0.

Například pokud máme m-1>0⇒m>1, pak f(x) bude rostoucí, protože číslo vedle x (koeficient) je větší než 0,

ale když m-1<0 nebo m<1, pak f(x) klesá.

# **Znaménko funkce prvního stupně**

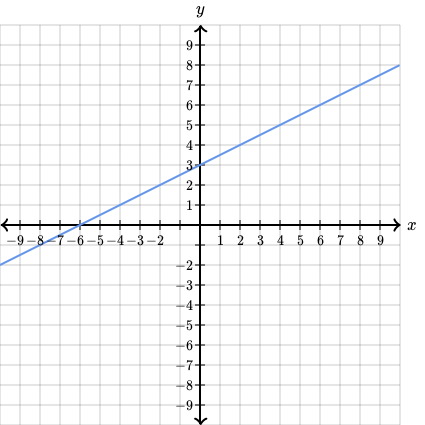
Obvykle je funkce prvního stupně definována na ℝ, to znamená, že sahá od -∞ do +∞.

A protože funkce je znázorněna přímkou a většinou je přímka šikmá, bude graf funkce protínat osu Ox v bodě, který nám řekne, že polovina tohoto grafu je nad osou a polovina pod ní.

## Hodnoty funkce prvního stupně

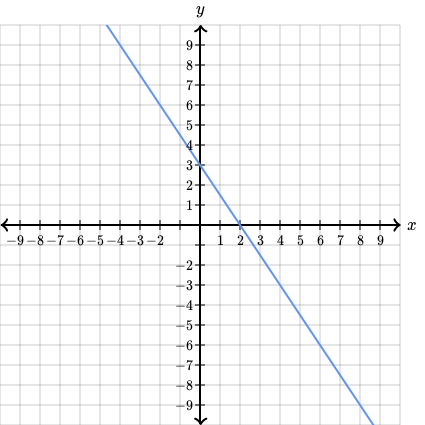
Pokud chceme vědět, jaké číslo funkce vrátí, tj. zda kladné nebo záporné, můžeme se nejprve podívat na monotónnost funkce.

Pokud je koeficient x a kladný, pak je grafem funkce rostoucí přímka, jako je tato::



A v tomto případě je patrné, že až do okamžiku, kdy x=-6, vrací funkce záporné hodnoty (tj. y<0). A poté vrací pouze kladné hodnoty.

Pokud a<0, pak grafem funkce bude klesající přímka:



## Výměnný bod

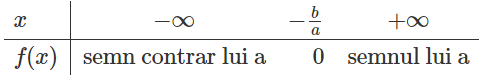
V obou případech jsme viděli, že funkce bude vracet hodnoty s opačným znaménkem a až do určitého bodu a poté se znaménkem a.

Tento bod se také nazývá kořen rovnice, protože v tomto okamžiku je y=0.

Abychom tedy našli tento bod, musíme mít f(x)=0, a pokud vezmeme obecný tvar funkce::

a⋅x+b=0, dostaneme hodnotu pro x 

Do má tedy funkce opačné znaménko a a po ní znaménko a. To vidíme v následující tabulce:



## Praktické příklady

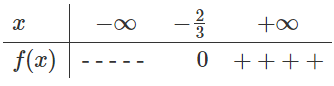
### Najděte znaménko pro následující funkce:

1. f(x)=3x+2

Odpověď: Nejprve musíme vypočítat bod, ve kterém se změní znaménko funkce, tj. když f(x)=0.

3x+2=0 se ukáže, že x= , takže znaménko funkce bude záporné až do . 

a za ním kladný, a to takto:

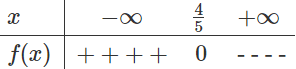


1. f(x)=4-5⋅x

R: vypočítáme bod, kde se změní znaménko::

-5⋅x=0 ⇒ -5⋅x=-4 ⇒ x= 

a až do tohoto bodu budeme mít opačné znaménko a, ale protože a=-5, bude funkce na tomto intervalu kladná a pak záporná:



# **Nerovnosti prvního stupně**

Pro funkci prvního stupně, jako je f(x)=7⋅x+8, můžeme vytvořit nerovnost ve tvaru 7⋅x+8≥0 (nebo ≤0).

Tato nerovnost není nic jiného než vyjádření funkce, pro kterou chceme vypočítat hodnoty x, které nám říkají, v jakých místech je funkce menší nebo větší než 0. A když říkáme, že funkce je větší než 0, znamená to, že vrací kladná čísla.

**Proč?**

Hlavním důvodem pro vytvoření nerovnosti z funkčního výrazu je snaha dozvědět se více o funkci. Přesněji řečeno, můžeme zjistit, pro které hodnoty x bude funkce větší nebo menší než 0.

Nemusíme to nutně dělat, ale pouze v případě, že jsme o to požádáni nebo pokud nás obzvláště zajímá, na kterém intervalu funkce vrací kladné nebo záporné hodnoty.

Můžeme si vlastně představit, že každá nerovnost (tvaru a⋅x+b≥0) má připojenou funkci, a když ji vyřešíme, dozvíme se něco o funkci, která má stejný výraz.

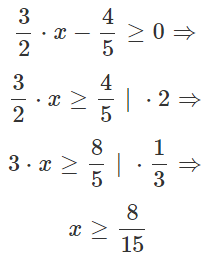
## Jak to počítáme?

Řešení se provádí běžným způsobem výpočtu nerovnosti. Interpretace je pak zajímavější.

Řekněme, že máme například funkci:

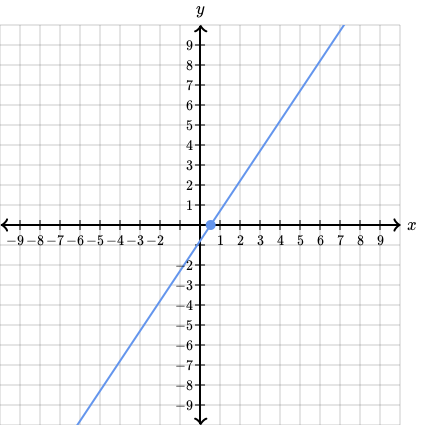


a pro tuto funkci vypočítáme, kdy je její rovnice větší než 0, a to::

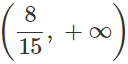


A ukazuje se, že funkce f(x) je vždy větší než 0, když 

 je tedy bod, po jehož dosažení bude funkce vracet pouze kladné hodnoty. A když se podíváme na graf funkce, vidíme, že (téměř ) představuje průsečík grafu s osou Ox, nad kterým zřejmě najdeme pouze kladné hodnoty.



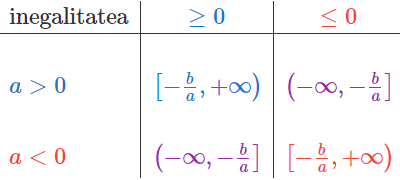
Tento bod však také představuje místo, kde funkce mění své znaménko, což jsme probrali v minulé lekci.

Řešením naší nerovnice , je tedy interval, který začíná od průsečíku funkce s osou Ox a pokračuje směrem k +∞, tedy .



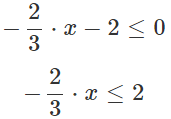
Obecně však všechna řešení těchto nerovnic začínají v bodě, jako je , a pokračují do +∞ nebo -∞. Můžeme odvodit obecnější definici, jako::

Řešením nerovnice tvaru a⋅x+b≥0a⋅x+b≥0 (nebo ≤0≤0) je interval, který začíná (nebo končí) -b/a, ale závisí na a, takto::

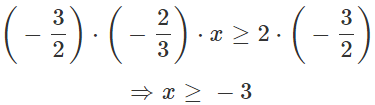


Podívejme se na následující příklad, jak přesně tuto tabulku použijeme.

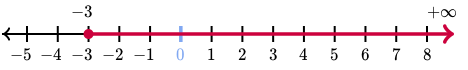
Řekněme, že máme funkci a chceme vědět, kdy je ≤ 0.



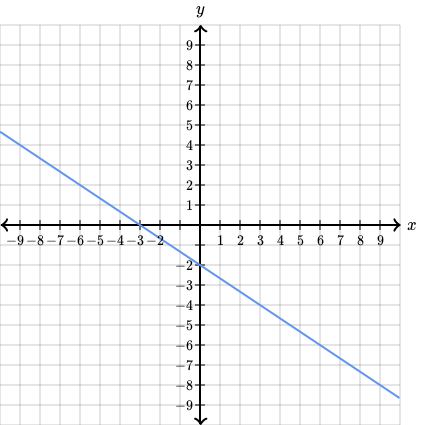
a protože a je menší než 0, změní se při násobení jeho inverzí znaménko nerovnosti, a to:



Z toho vyplývá, že řešením je interval **[-3,+∞)**



Na znaménku a tedy záleží, protože ovlivňuje znaménko nerovnosti. Je také tím, kdo nám říká, zda je graf funkce rostoucí nebo klesající. V tomto případě je záporný, to znamená, že funkce je klesající, a to se vysvětluje tím, že do určitého bodu najdeme kladná čísla a pak záporná čísla. Proto řešení nerovnice začíná v bodě (v našem případě -3) a pokračuje směrem k +∞.



To je také vidět z grafu funkce, až do bodu -3 máme kladná a pak záporná čísla. Řešení nerovnice tedy můžeme najít i z grafu funkce.

Zdroje

https://matematic.eu/LectiaDeMatematica/FunctiaDeGradul1.html

https://www.edumo.org/lectie/6401139935281152 - fctie de gr I

https://www.edumo.org/lectie/6086439091568640 - propr fct gr I

https://www.edumo.org/lectie/5551744788463616 - monotonie

https://www.edumo.org/lectie/5345009758896128 - semnul fctiei de gr I

https://www.edumo.org/lectie/5037387289722880 - inecuatii

https://ro.wikipedia.org/wiki/Func%C8%9Bie\_algebric%C4%83\_de\_gradul\_%C3%AEnt%C3%A2i

II STUPEŇ FUNKCE

**Definice funkce druhého stupně**

*f* :  *, f*(*x*)*=ax2 +bx+c, a0, a,b*,c .

**Grafické znázornění funkce II. stupně** Grafem funkce II. stupně je parabola s vrcholem , kde je.

který se také nazývá diskriminant funkce druhého stupně, a graf má pravou osu symetrie. 

# **Minimum a maximum funkce druhého stupně. Obraz funkce druhého stupně.**

- Funkce stupně II připouští minimum pro (to je i případ níže uvedeného příkladu grafu) a minimální hodnota je a je získána pro .

Diagram

Description automatically generated

- Funkce stupně II připouští maximum pro (to je i případ níže uvedeného příkladu grafu) a maximální hodnota je a je získána pro .

Diagram

Description automatically generated

Pokud jde o obraz funkce druhého stupně (tedy množiny jejích hodnot)

*y=f*(*x*)*=ax2 +bx+c*) To je:

pokud , resp. pokud .

# **Monotonia functiei de gradul II**

* Pentru , functia de gradul II admite un minim si este *descrecatoare* pentru si *crescatoare* pentru .



* Pentru , functia de gradul II admite un maxim si este *crescatoare* pentru si

*Descrescatoare* pentru .

# **Forma canonica a functiei de gradul II**

Pentru functia de gradul II *se defineste forma sa canonica* ca fiindText

Description automatically generated care ne conduce si la valorile de minim si maxim de mai inainte ca si la obtinerea radacinilor ecuatiei de gradul II, atunci cand , dupa cum vom vedea mai departe.

# **Pozitia parabolei fata de axa Ox. Intersectia graficului cu axele de coordonate. Semnul functiei de gradul II**

* Intersectia cu axa OY este data de punctul de coordonate .
* Intersectia cu axa OX se obtine rezolvand ecuatia *f*(*x*) = 0. Daca , atunci ecuatia *f*(*x*) = 0 are radacini reale:

,

 odtud kořeny rovnice II. stupně *ax2* +bx+c=0, *a0, a,b*,c. jsou , které jsou zároveň abscesami průsečíků s osou OX..

* Pokud pak graf protíná osu OX v bodechA picture containing night sky

  Description automatically generated a , jak je patrné z následujících nákresů..

Diagram

Description automatically generated Diagram

Description automatically generated

Pokud jde o znaménko funkce II. stupně, i v tomto případě je naznačeno výše uvedenými grafy a je zřejmě dáno znaménkem a znaménkem a. Máme tedy:



*x*

*f*(*x*)

Acelas semn cu *a* 0 Semn contrar lui *a* 0 Acelas semn cu *a*

Graf funkce se nachází nad i pod osou OX.

* Pokud graf protíná osu OX v bodě , který je zároveň vrcholem podobenství.

Diagram

Description automatically generatedDiagram

Description automatically generated

Znaménko funkce II. stupně je v tomto případě, jak naznačují i výše uvedené grafy, dáno znaménkem a znaménko a je:

Graf funkce se nachází pouze nad nebo pod osou OX, přičemž na ose OX je pouze vrchol paraboly.

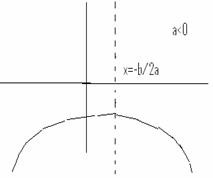
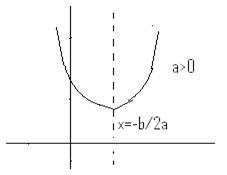


*x*

*f*(*x*)

Acelas semn cu *a* 0 Acelas semn cu *a*

* Pokud , pak graf neprotíná osu OX a vrchol paraboly. je nad osou OX (případ ) nebo pod ní (případ ).



Znaménko funkce II. stupně je v tomto případě, jak naznačují i výše uvedené grafy, dáno znaménkem a znaménko *a je*:



*x f*(*x*)

Acelas semn cu *a*

Graf funkce se nachází těsně nad nebo pod osou OX.

Poznámka: Znaménko funkce druhého stupně se používá k řešení nerovnosti druhého stupně, k odvození znaménka součinu nebo zlomku obsahujícího funkce druhého stupně apod.

# **Vztahy mezi kořeny a koeficienty (Vièteho vztahy). Lineární tvar funkce druhého stupně.**

S ohledem na kanonický tvar funkce druhého stupněText

Description automatically generated , odvodíme lineární tvar . Tento vztah ztotožníme se vztahem *f*(*x*)*=ax2 +bx+c*



máme , odkud vyplývají vztahy mezi kořeny a koeficienty (Vittovy vzorce):

Text

Description automatically generated

Pozorování.

-Vztahy mezi kořeny a koeficienty neřeší rovnici druhého stupně. Slouží k řešení různých úloh, v nichž se objevují další vztahy související s kořeny. Za povšimnutí stojí způsob, jakým jsou v závislosti na těchto skutečnostech vyjadřovány různé výrazy obsahující kořeny a . Např:

 nebo

.

-Jsou-li dány dva kořeny a nebo součet S a jejich součin P, pak lze sestavit rovnici druhého stupně, z níž vyšly:

sau .

# ***Nerovnosti tvaru ax2 +bx+c* 0 (,,), studované na nebo na intervalech reálných čísel.**

Nerovnost ***ax2 +bx+c* 0 (,,)** se řeší sestrojením tabulky znamének pro ***f(x)= ax2 +bx+c***, z níž se jako řešení nerovnosti vybere interval (nebo intervaly), který vyhovuje (vyhovují) dané nerovnosti. Řešíme-li nerovnici na intervalech reálných čísel, pak se dříve získané řešení protne se setkáním těchto intervalů, čímž získáme konečné řešení nerovnice.

# ***Soustavy nerovnic druhého stupně studované na intervalech reálných čísel nebo na nich***

Text

Description automatically generated

Každou nerovnost řešíme zvlášť a získáme řešení (pro první nerovnost), (pro druhou nerovnost),, (pro nerovnost *n)*. Kde je řešení získané soustavy nerovnic (pokud je řešena na ), protože je .



Pokud je systém řešen na setkání intervalů, pak řešení se protíná se setkáním intervalů.



# **Soustavy rovnic druhého stupně**

* 1. **Formulářové systémy**

kde *a,b,c,d,m,n*,p

in, z nichž jedna rovnice je stupně I a jedna stupně II.

Z rovnice prvního stupně se dosadí jedna neznámá podle druhé, například , a dosadí se do rovnice druhého stupně, čímž se získá:

Text

Description automatically generated with medium confidence

jehož řešením získáme dvě řešení.

Vrátíme-li se s těmito hodnotami do substitučního vztahu, získáme dvojice řešení.

A picture containing dark, night sky

Description automatically generated a



* 1. **Řešení formulářových systémů**

, .

nazývané také symetrické systémy.

Vezmeme-li v úvahu, že výše uvedené vztahy mohou být vztahy mezi kořeny a koeficienty rovnice druhého stupně, sestrojíme pak rovnici , jejíž řešení dává dvě řešení . 

a odtud se získá řešení soustavy:

No image

Description automatically generatedsiNo image

Description automatically generated with medium confidence .

Příklad. Řešení soustavy v množině reálných čísel:



No image

Description automatically generated

* 1. **Homogenní systémy**

Text

Description automatically generated, .

Řešení těchto soustav se provádí následujícím způsobem: první rovnici vynásobíme a druhou rovnici ( ), takže

Text

Description automatically generated



Složením obou rovnic získáme vztah který vydělíme

, jde o tot rovnice . Poznámka wth dostáváme rovnici II. stupně, . Předpokládáme, že řešení této rovnice jsou 

pak můžeme vytvořit systémy:

Graphical user interface

Description automatically generated with medium confidence si Graphical user interface

Description automatically generated with medium confidence

což jsou zjevně systémy typu *a*).

# **Cvičení**

1. Hodnota parametru , pro kterou má rovnice jednoznačné řešení v intervalu , je:
2. a) ; b) ; c) ; d) ;e) .

*Řešení: Protože rovnice* má jednoznačné řešení v intervalu , musí být podmínky splněny současně:

takžeText

Description automatically generated a kde



. Z toho vyplývá, že ,

takže správná odpověď *d*).

1. Reálné číslo x je striktně větší než jeho kvadrát tehdy a jen tehdy:

a) b) c) d) e) 

*Řešení: . Nerovnost* má řešení . Správná odpověď je a).

1. Nechť platí rovnice , kde . Je-li číslo komplexní kořenem rovnice, pak:

a) b) c) d) e) . 

Řešení: Protože koeficienty m a n jsou reálná čísla a rovnice připouští komplexní kořen , pak rovnice připouští kořen a konjugát . Ze vztahů Viète si vyplývá a správná odpověď je b).

1. Pro rodinu funkcí druhého stupně jsou vrcholy přidružených parabol na pravé straně rovnice:

**a)** ; **b)** ; **c)** ; **d)** ;** ; e)** .

Řešení: Abscisa vrcholu V paraboly je a řád je následující

. Výsledkem je: což je rovnice druhé bisektrony soustavy os XOY). Takže **c)**

Množina všech hodnot reálného parametru m, pro které je

, je:

**a)** (dav prázdný) ; **b) ; c) d)** ; **e)** .

*Řešení*: Podmínky jsou: si . Výsledky: . Takže **b)**.

1. Soubor všech hodnot parametrů pro které jsou kořeny kvocientu pro je:



**a) ; b) ; c)** (prázdný dav) ; **d) ; e)** .

*Řešení*: . Z dané podmínky a z

Výsledek . Takže **c)**.

1. Nechť platí nerovnost . Z následujících intervalů je množina všech řešení této nerovnosti:

a) ; b) ;c) ;d) ;e) .

*Řešení*: Z podmínek existence . pro je nerovnost zjevně splněna. Pro odmocněním dané nerovnosti dostaneme



.

takže řešení . Řešení bude

1. Buďte funkční ,. Skutečné hodnoty parametrů pro které 

Jsou:

a) ; b) ;c) ;d) ;e) .

*Řešení*: Víme, že tehdy a jen tehdy, když rovnice má řešení na , jestliže rovnice má reálnou



sol. in , so průměr



pro . Podmínka, že a je řešením



Součet integrálních řešení nerovnosti je:

a) b) c) d) e) 

*Řešení*: , takže , takže

Správná odpověď **c)**.

1.  Nechť je funkce Množina hodnot parametrů

pro který graf funkce f protíná osu x ve dvou různých bodech, je:

a) b) c)



e)

*Řešení*: Pro danou rovnici , uložte , odkud pochází. 

Správná odpověď **a**).

1. Reálné hodnoty parametru m, pro které platí , jsou:

a) b) c)d) e) 



aby byl zlomek kladný, musí mít hodnotu , což znamená, že

pe

, de u

*Řešení*: Protože



Správná odpověď je **b**).

1. Funkce Hodnoty parametru, pro které je parabola spojená s funkcí f tečnou k Ox, jsou:

a) b) c) d) e) 

*Řešení*: Rovnice musí mít pouze jedno řešení, takže pro uložte . Výsledkem je , takže

Správná odpověď **c)**.

1. Nerovnost má řešení:

a) b) c) d) e) 

*Řešení*: Nerovnost je ekvivalentníText

Description automatically generated .

Řešením je Správná odpověď **e**).

1. Obrázek funkce je:

a) c) d) 



b)

e)

*Řešení*: Je ověřeno, že protože funkce f je spojitá, tak má



si

Ukázalo se, že Darbouxův majetek Správná odpověď **b**).

Hodnota výrobku



15) Funkce

je

a) b) c) d) e)

*Řešení*: Rovnice: má kořeny si , takže



, který zahrnuje , a hodnotu součinu Správná odpověď **d**).