**Logo, company name

Description automatically generated**

**Geometrická interpretace derivace a odvozených funkcí**

**Třída školy: K12**

**Obsah**

[GEOMETRICKÁ INTERPRETACE DERIVACE 3](#_Toc125619669)

[DERIVAČNÍ FUNKCE 10](#_Toc125619670)

[Problém tečny ke křivce 11](#_Toc125619671)

[Odvozenost a kontinuita 13](#_Toc125619672)

[Boční deriváty 14](#_Toc125619673)

[Odvozeno vlevo 14](#_Toc125619674)

[Odvozeno doprava 15](#_Toc125619675)

[Definice derivace funkce v bodě 15](#_Toc125619676)

[Poznámky 16](#_Toc125619677)

[Tabulka s derivacemi elementárních funkcí 17](#_Toc125619678)

[Operace s derivovatelnými funkcemi 18](#_Toc125619679)

[Závěry 19](#_Toc125619680)

[Zdroje 20](#_Toc125619681)

[Pracovní list 21](#_Toc125619682)

# ****GEOMETRICKÁ INTERPRETACE DERIVACE****

**Diagram, schematic

Description automatically generated**

1. Jestliže f'(x0 )=∞, pak graf má svislou polopřímku.

V bodě M.

2) Jestliže f'(x0 )=-∞, pak graf připouští svislou polopřímku nad bodem M.

**Diagram, schematic

Description automatically generated**

3) Jestliže fd '(x0 )=∞, pak graf připouští svislou polopřímku nad bodem M.

**Diagram

Description automatically generated**

4) Jestliže fd '(x0 )=∞, pak graf připouští svislou polopřímku pod bodem M.

**Diagram

Description automatically generated**

5) Pokud se boční derivace rovnají fd '(x0 )=fs'(x0 ), pak jsou obě tečny v prodloužení. V tomto případě je M inflexním bodem (tečna protíná graf funkce).

**A picture containing text, music

Description automatically generated**

**A picture containing text, linedrawing

Description automatically generated**

Definice. Říká se, že x0 je inflexním bodem funkce f, pokud je funkce spojitá v bodě x0, má v bodě x0 derivaci (konečnou nebo nekonečnou).

a pokud je Graf na jedné straně x0 konexní (konkávní) a na druhé straně konkávní (konvexní).

6) Jsou-li boční derivace různé a fd '(x0 )=+∞,fs'(x0 )=- ∞, sau fd '(x0 )=-∞,fs'(x0 )=+∞, pak se obě polopřímky překrývají a M je bod zvratu.

**Chart

Description automatically generated with low confidence**

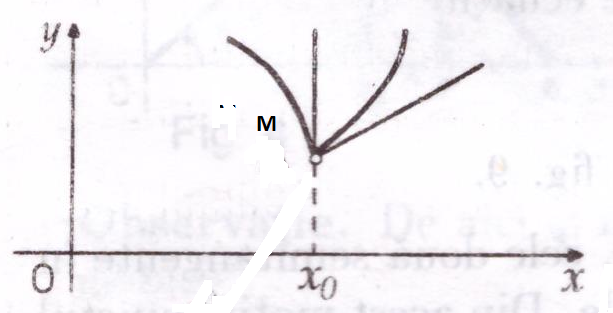
**A picture containing diagram

Description automatically generated**

7) Pokud jsou boční derivace různé a alespoň jedna je konečná, pak je M úhlový bod.

**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

****

**Případ 1) fs '(x0 )=-∞, fd '(x0 )ϵR**

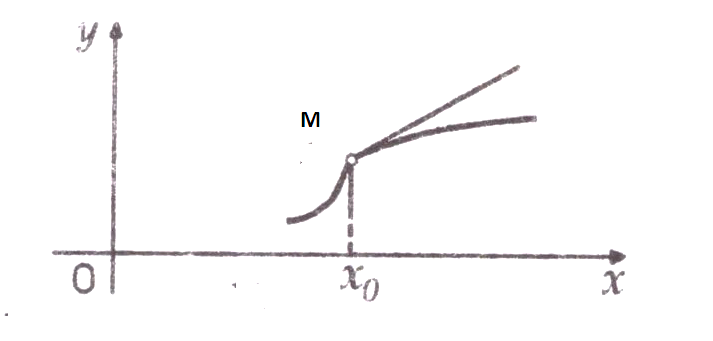
**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

**Případ 2) fs '(x0 )=+∞, fd'(x0 )ϵR**

**Diagram

Description automatically generated**

****

**Diagram

Description automatically generated with medium confidenceA picture containing diagram

Description automatically generated**

**Případ 3) fd '(x0 )=+∞, fs '(x0 )ϵR**

**Případ 4) fd '(x0 )=-∞, fs '(x0 )ϵR**

**A picture containing text

Description automatically generated**

**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

**Případ 5) fd '(x0 ), fs '(x0 )ϵR și fd '(x0 )≠fs '(x )0**

**A picture containing diagram

Description automatically generated**

# ****DERIVAČNÍ FUNKCE****

**Pojem derivace zavedl a použil v matematice vědec Isaac Newton (1642 - 1724) v souvislosti se studiem mechaniky.**

**Problém okamžité rychlosti mobilního zařízení**

**průměrná rychlost mobilního zařízení v časovém intervalu [t0, t] je**

****

**okamžitá rychlost mobilního zařízení v čase t0 (pevná), t0 > 0 je:**

****

**zrychlení pohyblivého prvku v pevném okamžiku t0 je::**

****

**Téměř ve stejné době zavedl vědec Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) pojem derivace v souvislosti se studiem tečny ke křivce v jejím bodě.**

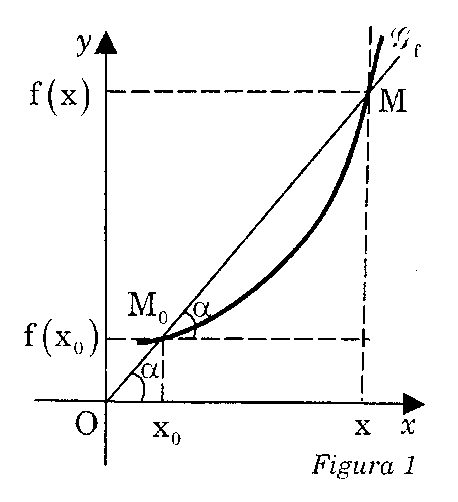
# ****Problém tečny ke křivce****

**Je-li f:(a,b)🡪 R, spojitá funkce a M0(x0;f(x0)) na grafu, Gf na f.**

**Sklon sekanty M0M představuje trigonometrický tangens úhlu, který svírá s kladným směrem osy Ox.**

****

**Sklon neboli úhlový koeficient tečny v bodě M0 ke křivce Gf je:**

****

**Tečna v bodě M0(x0,f(x0)) je dána rovnicí:**

****

****

**Vztah (1) se zapisuje takto::**

**a nazývá se derivace funkce f v bodě x0.**

**Nechť funkce f:D🡪 R, D🡪 R, x0 Є D je akumulační bod davu D.**

**O funkci f se říká, že má derivaci v bodě x0 Є D, pokud limita existuje:**

****

**Tato limita se nazývá derivace funkce f v bodě x0 a zapisuje se:**

****

**Říká, že funkce f je diferencovatelná v bodě x0 Є D, jestliže limita pod ní existuje a je konečná:**

****

# ****Odvozenost a kontinuita****

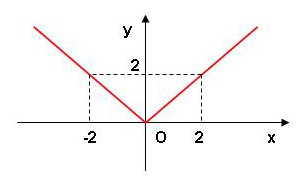
**Každá funkce diferencovatelná v bodě je v tomto bodě spojitá.**

**Poznámky:**

**Číselná funkce může být v bodě spojitá, aniž by byla v tomto bodě diferencovatelná.**

**Příklad:**

**Režimová funkce f : R🡪 R, f(x) =|x| je spojitá v bodě x0 = 0 a není diferencovatelná v bodě x0 = 0.**

****

**Každá nespojitá funkce v bodě není v tomto bodě diferencovatelná.**

**Existují funkce, které jsou v určitém bodě nespojité a které mají v tomto bodě derivaci.**

**Příklad:**

**Funkce f : Níže uvedená funkce R🡪 R je nespojitá v bodě x0 = 0 a f'(0) = + ∞.**

****

# ****Boční deriváty****

**Nechť je funkce f:D🡪 R a x0 Є D.**

# ****Odvozeno vlevo****

****

# ****Odvozeno doprava****

****

**Funkce f má derivaci a je diferencovatelná v x0 tehdy a jen tehdy, když má boční derivace a je diferencovatelná vlevo, resp. vpravo v x0 a::**

****

# ****Definice derivace funkce v bodě****

**Zda f:E R, kde E je interval nebo sjednocení intervalů z R**

**Říká se, že funkce f má derivaci v , jestliže limita existuje v. **

**V tomto případě se tato limita označuje a nazývá se derivace funkce f v bodě. **

**Takže **

**O funkci f se říká, že je odvozená na , jestliže limita existuje v R**

**(existuje a je konečný)**

**V tomto případě se tato mez označuje , a to **

**O funkci f se říká, že je diferencovatelná na intervalu I, jestliže je diferencovatelná v každém bodě intervalu I.**

# ****Poznámky****

**Funkce f má derivaci v x0 f jsou derivované laterály v x0 a **

**( existuje v ; existuje v )**

# ****Tabulka s derivacemi elementárních funkcí****

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **FUNKCE** | **DERIVATIVNÍ** | **POLE DIFERENCOVATELNOSTI** | **SLOŽENÁ FUNKCE** | **DERIVATIVNÍ** |
| **c (konstantní)** | **0** |  |  |  |
| **x** | **1** |  | **u** |  |
| **x** |  |  |  |  |
| **x**  **( )** |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| **ln x** |  |  | **ln u** |  |
|  |  |  |  |  |
| **sin x** | **cos x** |  | **sin u** | **cos u** |
| **cos x** | **- sin x** |  | **cos u** | **- sin u** |
| **tg x** |  | **cos x** | **tg u (cos u )** |  |
| **ctg x** | **-** | **sin x** | **ctg u (sin u )** |  |
| **arcsin x** |  | **(-1;1)** | **arcsin u** |  |
| **arccos x** | **-** | **(-1;1)** | **arccos u** |  |
| **arctg x** |  |  | **arctg u** |  |
| **arcctg x** | **-** |  | **arcctg u** |  |

# ****Operace s derivovatelnými funkcemi****

****

****

****

****

** ( c = konstanta)**

****

****

****

# ****Závěry****

**Studium funkcí obecně, a zejména spojitých, derivovatelných funkcí, vyžaduje rozvoj obecných a specifických dovedností, které se odrážejí v:**

**Grafická/vizuální identifikace vlastností číselné funkce, pokud jde o: ohraničenost, spojitost, asymptotickou tendenci, derivovatelnost;**

**Spojení dat získaných z problémové situace s vlastnostmi studovaných numerických funkcí, jako jsou: věty o konvergenci, limitní operace, typové limity, derivační tabulky;**

**Použití specifických algoritmů, diferenciálního výpočtu, při řešení některých problémů a modelování některých specifických procesů, některých oblastí činnosti;**

**Vyjádření konkrétních tvrzení v jazyce matematické analýzy, které lze modelovat pomocí numerických funkcí;**

**Výklad vlastností některých funkcí na základě grafického čtení, které představují příklady z ekonomické, sociální a vědecké oblasti;**

**Experimentální ověření výsledků odvozených výpočtem u praktických problémů, které lze vyjádřit matematicky;**

**Určení určitého situačního optima pomocí diferenciálního počtu v praktických nebo specifických problémech některých oborů činnosti.**

**Užitečné aplikace derivace funkce**

**určení intervalů monotónnosti pro danou funkci (zda je funkce rostoucí nebo klesající) - to se provádí studiem znaménka první derivace funkce;**

**určení extrémních bodů pro rozšířenou třídu číselných funkcí - to se provádí studiem znaménka první derivace funkce;**

**teoretické výsledky o monotónnosti a extrémních bodech funkce umožňují získat některé nerovnosti, které by se pomocí elementárních metod obtížně dokazovaly;**

**určení intervalů konvexity nebo konkávity funkce - to se provádí studiem znaménka druhé derivace funkce;**

**s pomocí derivace je možné stanovit pořadí násobnosti kořenů polynomiální rovnice nebo intervalů, ve kterých se nacházejí kořeny rovnice spojené s polynomiální funkcí.**

# ****Zdroje****

**Gheorghe Cârjă, Ovidiu Cârjă - Analiză matematică, Culegere de probleme rezolvate şi comentate, Editura GIL, Zalău, 2003;**

**Lia Aramă, Toader Morozan - Culegere de probleme de analiză matematică, Editura Universal Pan, Bucureşti, 1997;**

**Marius Burtea, Georgeta Burtea - Matematică, manual pentru clasa a XI-a, Editura Carminis, Piteşti, 2006;**

**Mircea Ganga - Probleme rezolvate din manualele de matematică pentru clasa a XI-a, Editura MATHPRESS, Ploieşti, 2006.**

# Pracovní list

1. Nechť je f : R → R, f(x)=-3+5
2. Výpočet
3. Vypočítejte f'(x)
4. Vypočítejte f'(-1) + f''(-1)
5. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f s abscisovým bodem.
6. Výpočet
7. Výpočet
8. Určete intervaly monotónnosti a krajní body funkce f.
9. Určete inflexní bod