****

**Εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού**

Σχολική βαθμίδα: Κ9

**Περιεχόμενο**

[**ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ** 3](#_Toc125646027)

[**Ορισμός** 3](#_Toc125646028)

[Γιατί «λειτουργία πρώτου βαθμού»; 4](#_Toc125646029)

[Ιδιότητες της συνάρτησης πρώτου βαθμού 5](#_Toc125646030)

[**Μονοτονικότητα της συνάρτησης πρώτου βαθμού** 6](#_Toc125646031)

[***Παρατηρήσεις*** 7](#_Toc125646032)

[**Το σημάδι της λειτουργίας του πρώτου βαθμού** 8](#_Toc125646033)

[Οι τιμές της συνάρτησης του πρώτου βαθμού 8](#_Toc125646034)

[Σημείο ανταλλαγής 10](#_Toc125646035)

[Πρακτικάπαραδείγματα 11](#_Toc125646036)

[Βρείτε το σύμβολο για τις ακόλουθες λειτουργίες: 11](#_Toc125646037)

[**Ανισότητες πρώτου βαθμού** 12](#_Toc125646038)

[Πώς υπολογίζουμε; 12](#_Toc125646039)

[**ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΙΙ ΒΑΘΜΟΥ** 18](#_Toc125646040)

[**Ορισμός της λειτουργίας του δεύτερου βαθμού** 18](#_Toc125646041)

[**Γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης δευτέρου βαθμού** 18](#_Toc125646042)

[**Η ελάχιστη και η μέγιστη λειτουργία δεύτερου βαθμού. Η εικόνα της λειτουργίας του δεύτερου βαθμού.** 19](#_Toc125646043)

[**Monotonia functiei de gradul II** 20](#_Toc125646044)

[**Forma canonica a functiei de gradul II** 20](#_Toc125646045)

[**Pozitia parabolei fata de axa Ox. Intersectia graficului cu axele de coordonate. Semnul functiei de gradul II** 20](#_Toc125646046)

[**Οι σχέσεις μεταξύ ριζών και συντελεστών (σχέσεις Viète). Η γραμμική μορφή της συνάρτησης δευτέρου βαθμού.** 23](#_Toc125646047)

[***Ανισότητες μορφής ax2*+*bx+c* 0 (,,), που μελετώνται σε ή σε διαστήματα πραγματικών αριθμών** 24](#_Toc125646048)

[***Συστήματα ανισοτήτων δευτέρου βαθμού, που μελετώνται σε ή σε διαστήματα πραγματικών αριθμών*** 24](#_Toc125646049)

[**Συστήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού** 25](#_Toc125646050)

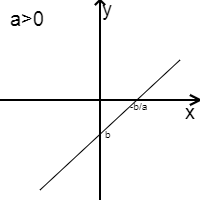
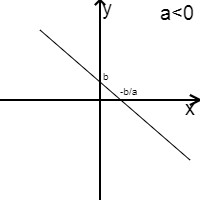
[**Ασκήσεις** 27](#_Toc125646051)

# **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ**

**Ορισμός**

Η συνάρτηση f:R→R,f(x)=ax+b,a,b∈R,a≠0 ονομάζεται συνάρτηση πρώτου βαθμού.

Η γεωμετρική αναπαράσταση του γραφήματος της συνάρτησης πρώτου βαθμού είναι μια ευθεία γραμμή.

Εάν a>0 η συνάρτηση αυξάνεται αυστηρά και εάν a<0 η συνάρτηση μειώνεται αυστηρά.

Μια συνάρτηση του πρώτου βαθμού είναι απλώς μια συνηθισμένη συνάρτηση που έχει τη μορφή:

f(x)=a⋅x+bf(x)=a⋅x+b, όπου a και b είναι δύο πραγματικοί αριθμοί.

Τώρα, θα ήταν καλό αν είχαμε a≠0a≠0, γιατί αν ήταν 00, τότε θα είχαμε μόνο μια σταθερή συνάρτηση, της μορφής f(x)=bf(x)=b, η οποία επιστρέφει πάντα την ίδια τιμή.

Μερικά παραδείγματα λειτουργιών πρώτου βαθμού θα ήταν:









## Γιατί «εξισώσεις πρώτου βαθμού»;

Όλα εξαρτώνται από το τι δύναμη έχει το x. Στην περίπτωσή μας είναι στη δύναμη του 1, δηλαδή



Μια συνάρτηση του πρώτου βαθμού έχει επίσης μια εξίσωση που επισυνάπτεται:



Για παράδειγμα, οι ακόλουθες συναρτήσεις έχουν συνημμένη μια εξίσωση:

 έχει

 θα έχει ecu , όπου a είναι

Η λειτουργία είναι μια συνάρτηση πρώτου βαθμού με συντελεστές .

Η συνάρτηση είναι μια γραμμική συνάρτηση με .

Η συνάρτηση είναι σταθερή συνάρτηση όταν

## Ιδιότητες της εξίσωσης πρώτου βαθμού

Μια συνάρτηση του πρώτου βαθμού είναι μια γραμμική εξίσωση στο τέλος. Αυτό σημαίνει ότι αντιπροσωπεύεται από μια ευθεία γραμμή και ότι δανείζεται ακόμη και τις ιδιότητες μιας τέτοιας συνάρτησης. Μεταξύ των οποίων:

Το γράφημα της εξίσωσης του πρώτου βαθμού είναι μια ευθεία γραμμή, η οποία έχει κλίση που μπορούμε να υπολογίσουμε

Για μια εξίσωση , ο τύπος για (κλίση του δεξιού) είναι:



Και στην περίπτωση μιας συνάρτησης, δεν θα κάνουμε τίποτα άλλο από το να αντικαταστήσουμε αυτό με . Έτσι, η εξίσωση της γραμμής για μια συνάρτηση του πρώτου βαθμού θα γίνει:



Στην πραγματικότητα, η κλίση της γραμμής είναι ο συντελεστής x, δηλαδή a, από τη γενική μορφή της συνάρτησης

1. Οι συντεταγμένες ενός σημείου στα δεξιά της συνάρτησης αντιπροσωπεύουν επίσης μια λύση για την εξίσωση που συνδέεται με τη συνάρτηση.
2. Όπως είναι φυσιολογικό, η λύση μιας συνάρτησης όπως αυτή , αντιπροσωπεύει τις συντεταγμένες ενός σημείου στο γράφημα της συνάρτησης. Αυτό σημαίνει ότι αυτοί οι αριθμοί αντιπροσωπεύουν επίσης μια λύση για την εξίσωση που συνδέεται με τη συνάρτηση.
3. Πιο συγκεκριμένα, αν έχουμε μια συνάρτηση  και θα πάρουμε μια τιμή για το x, ας πούμε , thn το σημείο θα ανήκει στο γράφημα της συνάρτησης και θα είναι επίσης μια λύση για την εξίσωση
4. Για να αναπαραστήσουμε μια συνάρτηση του πρώτου βαθμού, πρέπει να βρούμε την τομή του γραφήματος με τους άξονες.

Επειδή το γράφημα αυτής της εξίσωσης είναι μια ευθεία γραμμή, χρειαζόμαστε 2 πόντους για να την αναπαραστήσουμε σωστά. Και τα ευκολότερα σημεία για να μάθετε είναι η τομή του γραφήματος με τους άξονες.

Για παράδειγμα, για  το , θα έχουμε:

* η τομή με τον άξονα y, όταν ,

νόημα και θα έχουμε το νόημα

* και η τομή με τον άξονα x, όταν 

δηλαδή  αποδεικνύεται ότι και εξακολουθούμε να έχουμε το σημείο

# **Μονοτονικότητα της εξίσωσης πρώτου βαθμού**

Είναι σημαντικό όταν θέλουμε να μάθουμε περισσότερα για μια συνάρτηση, να παρατηρήσουμε τη μονοτονία της.

Δηλαδή, εάν μια συνάρτηση αυξάνεται ή μειώνεται.

Η μονοτονικότητα της λειτουργίας του πρώτου βαθμού δίνεται από το a, τον συντελεστή x, δηλαδή:

* Όταν a>0 τότε η εξίσωση αυξάνεται ↗
* Ή όταν a<0 η εξίσωση μειώνεται ↘

Αν σκεφτούμε το f(x) ως εξίσωση μιας γραμμής, τότε το aa θα ήταν η κλίση της γραμμής. Πιο συγκεκριμένα, το a είναι ότι το m στη γενική μορφή της εξίσωσης μιας ευθείας γραμμής:

f(x)=α⋅x+b ή

y=m⋅x+n ή

Και γνωρίζουμε ότι εάν η κλίση του δεξιού είναι θετικός αριθμός, τότε το δικαίωμα αυξάνεται (δηλαδή κατευθύνεται στην επάνω δεξιά γωνία).

***Επίδειξη***

Για να ελεγχθεί η μονοτονικότητα της εξίσωσης, θα χρησιμοποιηθεί ο ρυθμός αύξησης (μείωσης) του f,

 για

Αν τότε το f αυξάνεται αυστηρά, και αν τότε το f μειώνεται αυστηρά.

### ***Παρατηρήσεις***

1. **Το σημάδι του α καθορίζει τη μονοτονικότητα της εξίσωσης του πρώτου βαθμού.**
2. Η προσαρμογή αντιπροσωπεύει μια γραμμή κλίσης (μια λοξή γραμμή που δεν είναι παράλληλη με τον άξονα Ox ή με τον άξονα Oy).

***Ασκήσεις:***

Δηλώστε τη μονοτονία των ακόλουθων εξισώσεων:

1. φ(x)=4⋅x

A: η συνάρτηση αυξάνεται, επειδή a>0, δηλαδή a=4

2. f(x)=3−5⋅x

A: η συνάρτηση μειώνεται, επειδή a<0a<0, ακριβέστερα a=−5

3. φ(x)=(μ−1)⋅x+3

Α: σε αυτή την περίπτωση, όλα εξαρτώνται από το m, πιο συγκεκριμένα όταν το m−1 είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από 0.

Για παράδειγμα, αν έχουμε m−1>0⇒m>1 τότε το f(x) θα αυξάνεται, επειδή ο αριθμός δίπλα στο x (ο συντελεστής) είναι μεγαλύτερος από 0,

αλλά όταν m−1<0 ή m<1 τότε το f(x) μειώνεται.

# **Το πρόσημο της εξίσωσης πρώτου βαθμού**

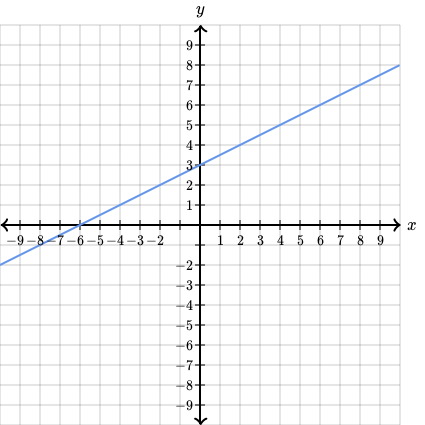
Συνήθως η συνάρτηση πρώτου βαθμού ορίζεται στο R, που σημαίνει ότι εκτείνεται από −∞ έως +∞.

Και επειδή η συνάρτηση αντιπροσωπεύεται από μια ευθεία γραμμή και τις περισσότερες φορές η ευθεία γραμμή είναι πλάγια, το γράφημα της συνάρτησης θα τέμνει τον άξονα Ox σε ένα σημείο που θα μας πει ότι το μισό από αυτό το γράφημα είναι πάνω από τον άξονα και το μισό κάτω από αυτόν.

## Οι τιμές της εξίσωσης πρώτου βαθμού

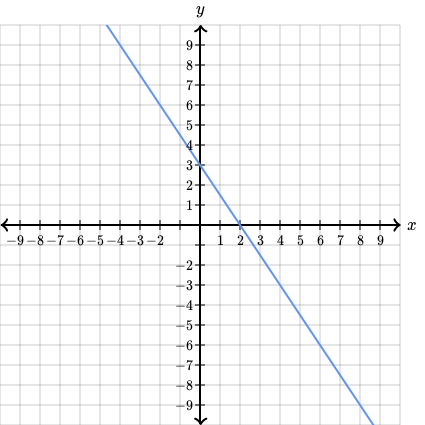
Αν θέλουμε να μάθουμε τι είδους αριθμό θα επιστρέψει η συνάρτηση, δηλαδή αν είναι θετική ή αρνητική, πρώτα απ 'όλα μπορούμε να δούμε τη μονοτονία της συνάρτησης.

Εάν το a, ο συντελεστής x, είναι θετικός, τότε το γράφημα της συνάρτησης είναι μια αυξανόμενη γραμμή, όπως αυτή::



Και σε αυτή την περίπτωση, παρατηρείται ότι μέχρι το σημείο x = −6, η συνάρτηση επιστρέφει αρνητικές τιμές (δηλαδή, y<0). Και μετά από αυτό, επιστρέφει μόνο θετικές τιμές.

Εάν a<0 τότε το γράφημα της συνάρτησης θα είναι μια φθίνουσα γραμμή:



## Σημείο καμπής

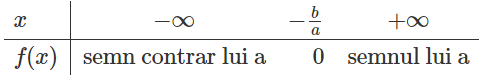
Και στις δύο περιπτώσεις, είδαμε ότι η συνάρτηση θα επιστρέψει τιμές με το αντίθετο πρόσημο ενός μέχρι ένα σημείο, και μετά από αυτό, με το σύμβολο του a.

Αυτό το σημείο ονομάζεται επίσης η ρίζα της εξίσωσης επειδή εκείνη τη στιγμή y =0.

Έτσι για να βρούμε αυτό το σημείο πρέπει να έχουμε f(x)=0 και αν πάρουμε τη γενική μορφή της συνάρτησης::

a⋅x+b=0, θα πάρουμε την τιμή για το x 

Έτσι, μέχρι η λειτουργία να έχει το αντίθετο σημάδι του α και μετά, το σημάδι του α. Μπορούμε να το δούμε στον παρακάτω πίνακα:



## Πρακτικά παραδείγματα

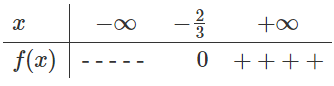
### Βρείτε το σύμβολο για τις ακόλουθες λειτουργίες:

1. f(x)=3x+2

A: πρώτα απ 'όλα πρέπει να υπολογίσουμε το σημείο όπου αλλάζει το πρόσημο της συνάρτησης, δηλαδή όταν f(x)=0

3x+2=0 αποδεικνύεται ότι x= , οπότε το πρόσημο της συνάρτησης θα είναι αρνητικό μέχρι

και θετικό μετά από αυτό, ως εξής:

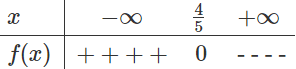


1. f(x)=4−5⋅x

R: θα υπολογίσουμε το σημείο όπου αλλάζει το σύμβολο::

−5⋅x=0 ⇒ −5⋅x=−4 ⇒ x=

και θα έχουμε το αντίθετο πρόσημο ενός μέχρι αυτό το σημείο, αλλά επειδή a=−5, η συνάρτηση θα είναι θετική σε αυτό το διάστημα και αρνητική τότε:



# **Ανισότητες πρώτου βαθμού**

Για μια συνάρτηση πρώτου βαθμού όπως f(x)=7⋅x+8, μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ανισότητα της μορφής 7⋅x+8≥0 (ή ≤0).

Αυτή η ανισότητα δεν είναι παρά η έκφραση της συνάρτησης για την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές του x, οι οποίες μας λένε τα μέρη όπου η συνάρτηση είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από 0. Και όταν λέμε ότι η συνάρτηση είναι μεγαλύτερη από 0, αυτό σημαίνει ότι επιστρέφει θετικούς αριθμούς.

**Γιατί?**

Ο κύριος λόγος για να δημιουργήσετε μια ανισότητα από μια έκφραση συνάρτησης είναι να μάθετε περισσότερα για τη συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να μάθουμε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από 0.

Δεν χρειάζεται απαραίτητα να το κάνουμε αυτό, αλλά μόνο αν μας ζητηθεί ή αν μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα να μάθουμε σε ποιο διάστημα η συνάρτηση επιστρέφει θετικές ή αρνητικές τιμές.

Μπορούμε πραγματικά να φανταστούμε ότι οποιαδήποτε ανισότητα (της μορφής a⋅x+b≥0) έχει μια προσαρτημένη συνάρτηση και όταν την λύσουμε, μαθαίνουμε κάτι για τη συνάρτηση που έχει την ίδια έκφραση.

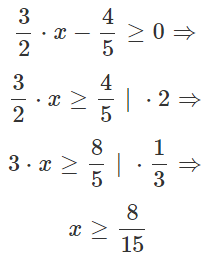
## Πώς υπολογίζουμε;

Η λύση γίνεται με τον κανονικό τρόπο υπολογισμού μιας ανισότητας. Η ερμηνεία λοιπόν είναι πιο ενδιαφέρουσα.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη συνάρτηση:

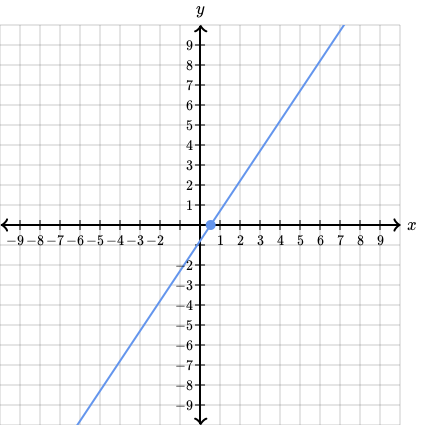


και θα υπολογίσουμε για αυτή τη συνάρτηση, όταν η εξίσωσή της είναι μεγαλύτερη από 0, δηλαδή::

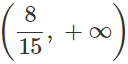


Και αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f(x) είναι πάντα μεγαλύτερη από 0 όταν 

Έτσι,  είναι το σημείο μετά το οποίο η συνάρτηση θα επιστρέψει μόνο θετικές τιμές. Και αν κοιτάξουμε το γράφημα της συνάρτησης βλέπουμε ότι (σχεδόν ) αντιπροσωπεύει την τομή του γραφήματος με τον άξονα Ox, πάνω από τον οποίο, προφανώς, θα βρούμε μόνο θετικές τιμές.



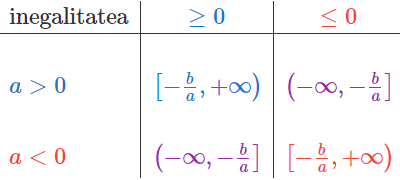
Αλλά αυτό το σημείο αντιπροσωπεύει επίσης τον τόπο όπου η λειτουργία αλλάζει το σημάδι της, κάτι που συζητήσαμε στο τελευταίο μάθημα. .

Έτσι, η λύση για την ανισότητα μας , είναι το διάστημα που ξεκινά από τη διασταύρωση της συνάρτησης με τον άξονα Ox και συνεχίζει προς +∞, δηλαδή .



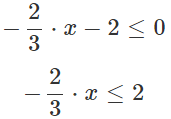
Αλλά σε γενικές γραμμές, όλες οι λύσεις για τέτοιες ανισότητες ξεκινούν από ένα σημείο όπως και συνεχίζουν να +∞ ή -∞. Μπορούμε να συμπεράνουμε έναν γενικότερο ορισμό, ως εξής:

Η λύση μιας ανισότητας της μορφής a⋅x+b≥0a⋅x+b≥0 (ή ≤0≤0) είναι το διάστημα που αρχίζει (ή τελειώνει) με –b/a αλλά εξαρτάται από το a, ως εξής::

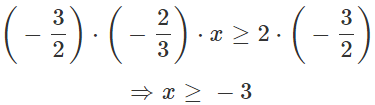


Ας πάρουμε το παρακάτω παράδειγμα για να δούμε ακριβώς πώς χρησιμοποιούμε αυτόν τον πίνακα. .

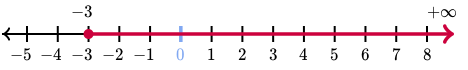
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη λειτουργία και θέλουμε να μάθουμε πότε αυτό είναι ≤ 0.



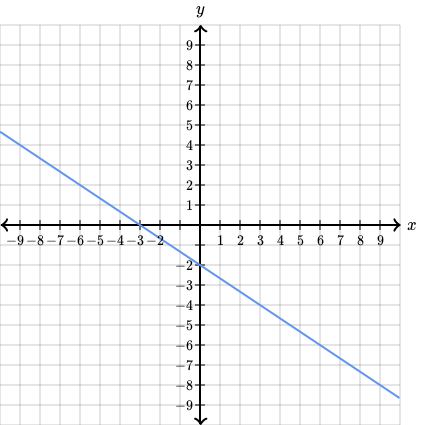
και επειδή το a είναι μικρότερο από 0, όταν πολλαπλασιάζουμε με το αντίστροφό του, το σύμβολο ανισότητας θα αλλάξει, δηλαδή:



Επομένως, η λύση είναι το διάστημα **[−3,+∞)**



Επομένως, το σημάδι ενός έχει σημασία επειδή επηρεάζει το σημάδι της ανισότητας. Είναι επίσης αυτός που μας λέει αν το γράφημα της συνάρτησης αυξάνεται ή μειώνεται. Σε αυτή την περίπτωση είναι αρνητικό, αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση μειώνεται και αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι μέχρι ένα σημείο θα βρούμε θετικούς αριθμούς και στη συνέχεια αρνητικούς αριθμούς. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η λύση της ανισότητας ξεκινά από ένα σημείο (στην περίπτωσή μας −3) και συνεχίζεται προς +∞.



Αυτό μπορεί επίσης να φανεί από το γράφημα της συνάρτησης, μέχρι το σημείο −3 έχουμε θετικούς και στη συνέχεια αρνητικούς αριθμούς. Επομένως, μπορούμε επίσης να βρούμε τη λύση μιας ανισότητας από το γράφημα της συνάρτησης.

Πηγές

https://matematic.eu/LectiaDeMatematica/FunctiaDeGradul1.html

https://www.edumo.org/lectie/6401139935281152 - fctie de gr I

https://www.edumo.org/lectie/6086439091568640 - ἐν τῇ ἐρήμῳ

https://www.edumo.org/lectie/5551744788463616 - μονοτονία

https://www.edumo.org/lectie/5345009758896128 - semnul fctiei de gr I

https://www.edumo.org/lectie/5037387289722880 - inecuatii

https://ro.wikipedia.org/wiki/Func%C8%9Bie\_algebric%C4%83\_de\_gradul\_%C3%AEnt%C3%A2i

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

**Ορισμός της εξίσωσης του δεύτερου βαθμού**

*f* : , *f*(*x*)=*αξ2*+*βx+γ, α*0*, α,β,γ*.

**Γραφική αναπαράσταση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού**Το γράφημα της συνάρτησης βαθμού ΙΙ είναι μια παραβολή, που έχει την κορυφή , όπου

η οποία ονομάζεται επίσης διάκριση της συνάρτησης δεύτερου βαθμού και το γράφημα έχει τον δεξιό άξονα συμμετρίας.

# **Η ελάχιστη και η μέγιστη εξίσωση δεύτερου βαθμού. Η εικόνα της εξίσωσης του δεύτερου βαθμού.**

*-* Η συνάρτηση του βαθμού ΙΙ δέχεται ένα ελάχιστο για (αυτό ισχύει και για το παρακάτω παράδειγμα γραφήματος) και η ελάχιστη τιμή είναι  και λαμβάνεται για .

Diagram

Description automatically generated

- Η εξίσωση του βαθμού ΙΙ δέχεται ένα μέγιστο για  (είναι επίσης η περίπτωση του παρακάτω παραδείγματος γραφήματος) και η μέγιστη τιμή είναι και λαμβάνεται για .

Diagram

Description automatically generated

Όσον αφορά την εικόνα της συνάρτησης του δεύτερου βαθμού (έτσι το σύνολο των τιμών του

*y*=*f*(*x*)=*ax2*+*bx+c*) Αυτό είναι:

εάν , και αντίστοιχα εάν .

# **Monotonia functiei de gradul II**

* Pentru , functia de gradul II admite un minim si este *descrecatoare* pentru si *crescatoare* pentru .



* Pentru , functia de gradul II admite un maxim si este *crescatoare* pentru si

*descrescatoare* pentru .

# **Forma canonica a functiei de gradul II**

Pentru functia de gradul II *se defineste forma sa canonica* ca fiind care ne conduce si la valorile de minim si maxim de mai inainte ca si la obtinerea radacinilor ecuatiei de gradul II, atunci cand , dupa cum vom vedea mai departe.Text

Description automatically generated

# **Pozitia parabolei fata de axa Ox. Intersectia graficului cu axele de coordonate. Semnul functiei de gradul II**

* Intersectia cu axa OY este data de punctul de coordonate .
* Τεμνεκτικότητα cu axa OX σε ομπτίνη rezolvand ecuatia *f*(*x*) = 0. Daca , atunci ecuatia *f*(*x*) = 0 are radacini reale:

,

εξ ου και οι ρίζες της εξίσωσης βαθμού ΙΙ *ax2+bx+c*=0*, a*0*, a,b,c* είναι που είναι επίσης οι τετμημένοι των σημείων τομής με τον άξονα OX. .

* Εάν τότε το γράφημα τέμνει τον άξονα OX στα σημεία και όπως φαίνεται από τα ακόλουθα σχέδια..A picture containing night sky

  Description automatically generated

Διάγραμμα

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα Διάγραμμα

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα

Όσον αφορά το πρόσημο της εξίσωσης του βαθμού ΙΙ, στην περίπτωση αυτή, προτείνεται επίσης από τα παραπάνω γραφήματα και προφανώς δίνεται από το σύμβολο του  και το σημάδι του α. Έτσι έχουμε:



*x*

*στ*(*χ*)

Acelas semn cu *ένας* 0 Semn contrar lui *ένας* 0 Acelas semn cu *ένας*

Το γράφημα της συνάρτησης βρίσκεται τόσο πάνω όσο και κάτω από τον άξονα OX.

* Αν το γράφημα τέμνει τον άξονα OX στο σημείο που είναι και η κορυφή της παραβολής.

Diagram

Description automatically generatedDiagram

Description automatically generated

Το σημάδι της λειτουργίας του βαθμού ΙΙ, στην περίπτωση αυτή, που επίσης προτείνεται από τα παραπάνω γραφήματα, δίνεται από το σύμβολο και το σύμβολο του α είναι:

Το γράφημα της συνάρτησης βρίσκεται μόνο πάνω ή κάτω από τον άξονα OX, έχοντας μόνο την κορυφή της παραβολής στον άξονα OX..

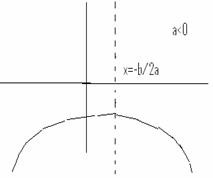
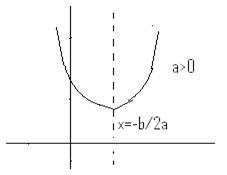


*x*

*στ*(*χ*)

Άσελας σμν ου *α* 0 Άσελας σμν άουτ

* Εάν τότε το γράφημα δεν τέμνει τον άξονα OX και η κορυφή της παραβολής είναι πάνω από τον άξονα OX (περίπτωση ) ή κάτω από αυτόν (περίπτωση ).



Το σημάδι της λειτουργίας του βαθμού II, στην περίπτωση αυτή, που προτείνεται επίσης από τα παραπάνω γραφήματα, δίνεται από το σύμβολο του  και το σημάδι του *ένας is*:



*χ στ*(*χ*)

Ασελάς σεμν cu *ένας*

Το γράφημα της συνάρτησης βρίσκεται ακριβώς πάνω ή κάτω από τον άξονα OX.

Σημείωση: Το σύμβολο της συνάρτησης του δεύτερου βαθμού χρησιμοποιείται για την επίλυση της ανισότητας του δεύτερου βαθμού, για να συμπεράνει το σημάδι ενός γινομένου ή ενός κλάσματος που περιέχει συναρτήσεις του δεύτερου βαθμού κ.λπ.

# **Οι σχέσεις μεταξύ ριζών και συντελεστών (σχέσεις Viète). Η γραμμική μορφή της εξίσωσης δευτέρου βαθμού.**

Λαμβάνοντας υπόψη την κανονική μορφή της συνάρτησης δεύτερου βαθμούText

Description automatically generated , συμπεραίνουμε τη γραμμική μορφή . Προσδιορισμός αυτής της σχέσης με *f*(*x*)=*ax2*+*bx+c*



έχουμε , από όπου προκύπτουν οι σχέσεις μεταξύ ριζών και συντελεστών (τύποι viète):

Text

Description automatically generated

Παρατήρηση.

-Οι σχέσεις μεταξύ ριζών και συντελεστών δεν επιλύουν την εξίσωση δευτέρου βαθμού. Χρησιμεύουν για την επίλυση διαφόρων ασκήσεων στις οποίες εμφανίζονται πρόσθετες σχέσεις που σχετίζονται με τις ρίζες. Αξίζει να σημειωθεί ο τρόπος με τον οποίο εκφράζονται διάφορες εκφράσεις που περιέχουν τις ρίζες  και ανάλογα με αυτές τις πραγματικότητες. Π.χ.:

 ή

.

-Αν δίνονται οι δύο ρίζες  και ή το άθροισμα S και το γινόμενο τους P, τότε μπορεί να σχηματιστεί η εξίσωση του δεύτερου βαθμού από τον οποίο προήλθαν:

σάου .

# ***Ανισότητες μορφής ax2*+*bx+c* 0 (,,), που μελετώνται σε ή σε διαστήματα πραγματικών αριθμών**

Η ανισότητα ***ax2*+*bx+c* 0 (,,)** επιλύεται κατασκευάζοντας τον πίνακα του σημείου για ***f(x)= ax2*+*bx+c***, από όπου επιλέγεται το διάστημα (ή τα διαστήματα) που ικανοποιεί (ικανοποιεί) την ανισότητα ως λύση της ανισότητας. Εάν η ανισότητα επιλυθεί σε διαστήματα πραγματικών αριθμών, τότε η λύση που λαμβάνεται πριν τέμνεται με τη συνάντηση αυτών των διαστημάτων, αποκτώντας έτσι την τελική λύση της ανισότητας.

# ***Συστήματα ανισοτήτων δευτέρου βαθμού, που μελετώνται σε ή σε διαστήματα πραγματικών αριθμών***

Text

Description automatically generated

Κάθε ανισότητα επιλύεται ξεχωριστά, αποκτώντας τις λύσεις  (για την πρώτη ανισότητα), (για τη δεύτερη ανισότητα), (για την ανισότητα *n*). Πού είναι η λύση στο σύστημα των ανισοτήτων που επιτυγχάνεται (αν λυθεί σε ) έναs ον .



Εάν το σύστημα επιλυθεί σε μια συνάντηση διαστημάτων, τότε η λύση τέμνεται από τη συνάντηση των διαστημάτων .



# **Συστήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού**

* 1. **Συστήματα φόρμας**

όπου *α,β,γ,δ,μ,ν,π*

στην οποία μία εξίσωση είναι βαθμού Ι και μία βαθμού ΙΙ.

Από την εξίσωση του πρώτου βαθμού, ένα άγνωστο αντικαθίσταται σύμφωνα με το άλλο, για παράδειγμα,  και εισάγεται στην εξίσωση του δεύτερου βαθμού, αποκτώντας:

Text

Description automatically generated with medium confidence

που λύθηκε δίνει δύο λύσεις.

Επιστρέφοντας με αυτές τις τιμές στη σχέση υποκατάστασης, λαμβάνονται τα ζεύγη λύσεων

A picture containing dark, night sky

Description automatically generated και



* 1. **Επίλυση συστημάτων φόρμας**

,.

ονομάζονται επίσης συμμετρικά συστήματα.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι παραπάνω σχέσεις μπορεί να είναι οι σχέσεις μεταξύ των ριζών και των συντελεστών μιας εξίσωσης δεύτερου βαθμού, η εξίσωση κατασκευάζεται στη συνέχεια , η οποία επιλύεται δίνει δύο λύσεις 

και από εδώ λαμβάνονται οι λύσεις του συστήματος:

No image

Description automatically generatedσιNo image

Description automatically generated with medium confidence .

Παράδειγμα. Για να λύσετε το σύστημα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών:



No image

Description automatically generated

* 1. **Ομοιογενή συστήματα**

Text

Description automatically generated,.

Η επίλυση αυτών των συστημάτων γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο: πολλαπλασιάστε την πρώτη εξίσωση με και τη δεύτερη εξίσωση με (), έτσι

Text

Description automatically generated



Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις παίρνουμε τη σχέση η οποία διαιρώντας με

, πάει στην εξίσωση . Σημειώστε ότι φτάνουμε σε μια εξίσωση βαθμού II, .  Υποθέτοντας ότι οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι 

τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τα συστήματα:

Graphical user interface

Description automatically generated with medium confidence σι Graphical user interface

Description automatically generated with medium confidence

που είναι προφανώς συστήματα τύπου *α*).

# **Ασκήσεις**

1. Η τιμή παραμέτρου για την οποία η εξίσωση  έχει διακριτή λύση στο διάστημα είναι:
2. a) ; b) ; c) ; δ) · ε)  .

*Λύση: Επειδή η εξίσωση* για να έχει μια διακριτή λύση στο διάστημα οι συνθήκες πρέπει να πληρούνται ταυτόχρονα:

έτσιText

Description automatically generated και όπου



. Από την οποία προκύπτει ότι ,

οπότε απαντήστε σωστά *δ*).

1. Ο πραγματικός αριθμός x είναι αυστηρά μεγαλύτερος από το τετράγωνό του, αν και μόνο εάν:

α) β) γ) δ) ε) 

*Λύση:. Η ανισότητα* έχει τη λύση . Η σωστή απάντηση είναι α).

1. Αφήστε την εξίσωση , όπου . Αν ο αριθμός είναι μιγαδικός είναι η ρίζα της εξίσωσης τότε:

α) β) γ) δ) ε) .

Λύση: Επειδή οι συντελεστές m και n είναι πραγματικοί αριθμοί και η εξίσωση δέχεται τη μιγαδική ρίζα , τότε η εξίσωση δέχεται τη ρίζα και τη συζυγή . Από τις σχέσεις του Viète si  αποτέλεσμα  και η σωστή απάντηση είναι β)

1. Για την οικογένεια των συναρτήσεων του δεύτερου βαθμού οι κορυφές των σχετικών παραβολών βρίσκονται στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης:

**α)** ·  **β)** ; **γ)** ;  **δ)** **** ;  **ε)** .

Λύση: Η τετμημένη της κορυφής V της παραβολής είναι και η σειρά είναι

. Το αποτέλεσμα είναι: που είναι η εξίσωση του δεύτερου διχοτόμο του συστήματος αξόνων XOY). Έτσι **γ)**

Το σύνολο όλων των τιμών της πραγματικής παραμέτρου m για την οποία

, είναι:

**α)** (το πλήθος άδειο) ·  **β)** **** ;  **γ)** ** δ)** ;  **ε)** ****.

*Λύσεις*: Οι συνθήκες είναι: si . Αποτελέσματα . Έτσι **β)**.

1. Το σύνολο όλων των τιμών παραμέτρων  για τις οποίες προορίζονται οι ρίζες του quation είναι:



**α)** ·  **β)** **** ; **γ)** (άδειο πλήθος) ·  **δ)** **** ;  **ε)** .

*Λύση*: .  Από τη δεδομένη κατάσταση και από

Αποτέλεσμα . Έτσι **γ)**.

1. Let η ανισότητα . Μεταξύ των ακόλουθων διαστημάτων, το σύνολο όλων των λύσεων αυτής της ανισότητας είναι:

a) ; β) · γ)  ; δ)  ; ε)  .

*Λύση*: Από τις συνθήκες ύπαρξης . για  η ανισότητα είναι προφανώς ικανοποιημένη. Για το τετραγωνίζοντας τη δεδομένη ανισότητα που έχουμε



.

έτσι η λύση . Η λύση θα είναι

1. Να είναι συνάρτηση ,. Πραγματικές τιμές παραμέτρων για τις οποίες

Είναι:

a) ; β) · γ)  ; δ)  ; ε)  .

*Λύση*: Γνωρίζουμε αν και μόνο αν η εξίσωση έχει λύση στο , αν η εξίσωση έχει πραγματική



sol. in , τόσο σημαίνει



για . Η προϋπόθεση ότι και να είναι λύση του



Το άθροισμα των ολοκληρωμένων λύσεων της ανισότητας είναι:

α) β) γ) δ) ε)

*Λύση*: , έτσι , έτσι

Σωστή απάντηση **γ**).

1.  Ας είναι η συνάρτηση  Το σύνολο των τιμών παραμέτρων

για την οποία το γράφημα της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x δύο διακριτά σημεία είναι:

α) β) γ)



e)

*Λύση*: Για τη δεδομένη εξίσωση , επιβάλλετε , από πού προέρχεται

Σωστή απάντηση **α**).

1. Οι πραγματικές τιμές της παραμέτρου m, για τις οποίες είναι:

α) β) γ) δ) ε) 



το κλάσμα για να είναι θετικό, πρέπει να είναι , τι υπονοεί

πε

, δρχ .

*Λύση*: Επειδή



Η σωστή απάντηση είναι **β**).

1. ΣυνάρτησηΟι τιμές της παραμέτρου για την οποία η παραβολή που σχετίζεται με τη συνάρτηση f εφάπτεται στο Βόδι είναι:

α) β) γ) δ) ε) 

*Λύση*: Η εξίσωση πρέπει να έχει μόνο μία λύση, οπότε για  impose  . Το αποτέλεσμα είναι , έτσι

Σωστή απάντηση **γ**).

1. Η ανισότητα  έχει λύση:

α) β)γ) δ) ε) 

*Λύση*: Η ανισότητα είναι ισοδύναμη μεText

Description automatically generated .

Η λύση για αυτό είναι Σωστή απάντηση **ε**).

1. Η εικόνα της συνάρτησης είναι:

a) c) d) 



b)

e)

*Λύση*: Επαληθεύεται ότι καθώς η συνάρτηση f είναι συνεχής, έτσι έχει



σι

Ιδιοκτησία του Darboux, αποδεικνύεται Σωστή απάντηση **β**).

Η αξία του προϊόντος



15) Λειτουργία

Είναι

α)β)γ)δ)ε)

*Λύση*: Η εξίσωση έχει ρίζες si , οπότε



, η οποία περιλαμβάνει , και την τιμή του προϊόντος Σωστή απάντηση **d**).