**Logo, company name

Description automatically generated**

**Η γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου και των παράγωγων συναρτήσεων**

**Σχολική βαθμίδα: Κ12**

**Περιεχόμενο**

[ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΏΓΟΥ 3](#_Toc125619669)

[ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ 10](#_Toc125619670)

[Το πρόβλημα εφαπτομένης σε μια καμπύλη 11](#_Toc125619671)

[Παραγωγικότητα και συνέχεια 13](#_Toc125619672)

[Πλευρικά παράγωγα 14](#_Toc125619673)

[Προέρχεται από τα αριστερά 14](#_Toc125619674)

[Προέρχεται από τα δεξιά 15](#_Toc125619675)

[Ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης στο σημείο 15](#_Toc125619676)

[Παρατηρήσεις 16](#_Toc125619677)

[Πίνακας με παράγωγα στοιχειωδών συναρτήσεων 17](#_Toc125619678)

[Λειτουργίες με παράγωγες συναρτήσεις 18](#_Toc125619679)

[Συμπεράσματα 19](#_Toc125619680)

[Πηγές 20](#_Toc125619681)

[Φύλλο εργασίας 21](#_Toc125619682)

# ****ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΏΓΟΥ****

**Σχηματικό διάγραμμα

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα**

1. Αν f'(x0)=∞, τότε το γράφημα δέχεται μια κατακόρυφη ημι-εφαπτομένη

Κάτω από το σημείο ΙΓ.

2) Αν στ'(χ0)=-∞, τότε το γράφημα δέχεται μια κατακόρυφη ημιφαπτομένη πάνω από το σημείο Μ.

**Diagram, schematic

Description automatically generated**

3) Αν fd«κδ0)=∞, τότε το γράφημα δέχεται μια κατακόρυφη ημιφαπτομένη πάνω από το σημείο M.

**Diagram

Description automatically generated**

4) Εάν fd«κδ0)=∞, τότε το γράφημα δέχεται μια κατακόρυφη ημι-εφαπτομένη κάτω από το σημείο M.

**Diagram

Description automatically generated**

5) Αν οι πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες fd'(x0)=fs'(x0), τότε οι δύο εφαπτόμενες είναι σε επέκταση. Σε αυτή την περίπτωση το M είναι το σημείο καμπής (η εφαπτομένη διασχίζει το γράφημα της συνάρτησης).

**A picture containing text, music

Description automatically generated**

**Μια εικόνα που περιέχει κείμενο, γραμμικό σχέδιο

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα**

Ορισμός. Λέγεται ότι το x0 είναι ένα σημείο καμπής της συνάρτησης f, αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο x0, έχει μια παράγωγο στο x0, (πεπερασμένο ή άπειρο)

και αν το Γράφημα είναι κοίλο (κοίλο) στη μία πλευρά του x0 και κοίλο (κυρτό) στην άλλη πλευρά.

6) Αν οι πλευρικές παράγωγοι είναι διαφορετικές και fd«κδ0)=+∞,fs'(x0)=- ∞, ή fd«κδ0)=-∞,fs'(x0)=+∞, τότε τα δύο ημιεπαντεύοντα αλληλεπικαλύπτονται και το M είναι το σημείο καμπής.

**Chart

Description automatically generated with low confidence**

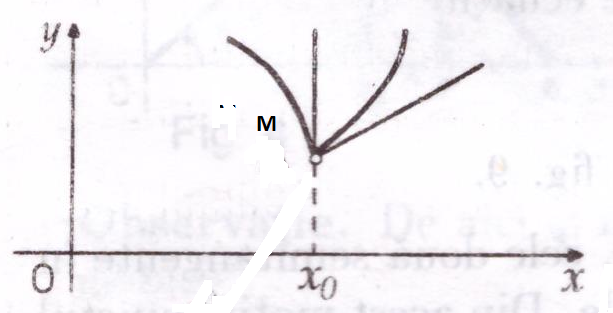
**A picture containing diagram

Description automatically generated**

7) Αν οι πλευρικές παράγωγοι είναι διαφορετικές και τουλάχιστον μία είναι πεπερασμένη, τότε το Μ είναι γωνιακό σημείο.

**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

****

**Περίπτωση 1) στs«κδ0)=-∞, fd«κδ0)εR**

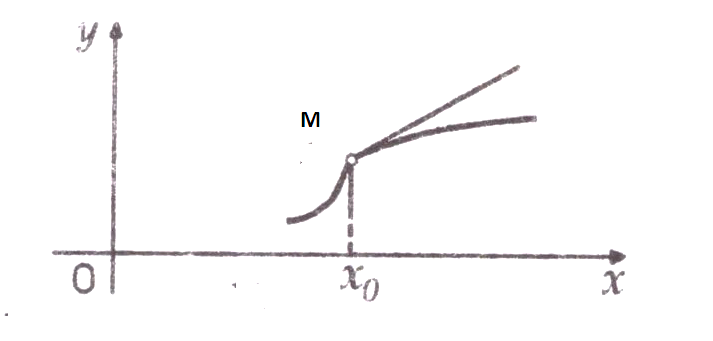
**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

**Περίπτωση 2) στs«κδ0)=+∞, fd'(x0)εR**

**Diagram

Description automatically generated**

****

**Διάγραμμα

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα με μέτρια εμπιστοσύνηΕικόνα που περιέχει διάγραμμα

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα**

**Περίπτωση 3) στ** **δ'(x0)=+∞, fs«κδ0)εR**

**Περίπτωση 4) στ** **δ'(x0)=-∞, fs«κδ0)εR**

**A picture containing text

Description automatically generated**

**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

**Περίπτωση 5) στd«κδ0), στs«κδ0)εΡ και στd«κδ0)≠στs«κδ0)**

**A picture containing diagram

Description automatically generated**

# ****ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ****

**Η έννοια της παραγώγου εισήχθη και χρησιμοποιήθηκε στα μαθηματικά από τον επιστήμονα Isaac Newton (1642 - 1724) σε σχέση με τη μελέτη της μηχανικής.**

**Το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού**

**η μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [t0, t] είναι**

****

**η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά το χρόνο t0 (σταθερό), t0 > 0 είναι:**

****

**η επιτάχυνση του κινητού στη σταθερή ροπή t0 είναι::**

****

**Σχεδόν ταυτόχρονα, ο επιστήμονας Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) εισήγαγε την έννοια της παραγώγου σε σχέση με τη μελέτη της εφαπτομένης σε μια καμπύλη σε ένα σημείο της. .**

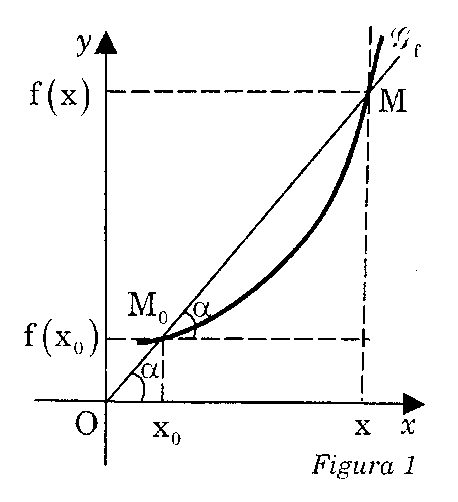
# ****Το εφαπτόμενο πρόβλημα σε μια καμπύλη****

**Αν f:(a,b)R, 🡪μια συνεχής συνάρτηση και M0(x0;f(x0)) στο γραφικό, Gf στο f.**

**Η κλίση του τέμνουσας M0M αντιπροσωπεύει την τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζεται από αυτό με τη θετική κατεύθυνση του άξονα Ox.**

****

**Η κλίση ή ο γωνιακός συντελεστής της εφαπτομένης στο σημείο M0 στην καμπύλη Gf είναι:**

****

**Η εφαπτομένη στο σημείο M0(x0,f(x0)) δίνεται από την εξίσωση:**

****

****

**Η σχέση (1) είναι γραμμένη::**

**και ονομάζεται παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x0.**

**Αφήστε τη συνάρτηση f:DR, DR, x0 🡪🡪Є D ένα σημείο συσσώρευσης του πλήθους D.**

**Η συνάρτηση f λέγεται ότι έχει παράγωγο στο σημείο x0 Є D εάν υπάρχει το όριο:**

****

**Αυτό το όριο ονομάζεται παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x0 και γράφεται:**

****

**Λέει ότι η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο x0 Є D αν το παρακάτω όριο υπάρχει και είναι πεπερασμένο:**

****

# ****Παραγωγικότητα και συνέχεια****

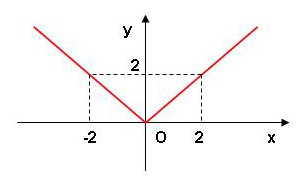
**Οποιαδήποτε συνάρτηση διαφοροποιήσιμη σε ένα σημείο είναι συνεχής σε αυτό το σημείο.**

**Παρατηρήσεις:**

**Μια αριθμητική συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο χωρίς να είναι διαφορίσιμη σε αυτό το σημείο.**

**Exanple:**

**Λειτουργία λειτουργίας f: RR, f(x) =|x|**  **🡪είναι συνεχής σε x0 = 0 και δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο x0 = 0.**

****

**Οποιαδήποτε ασυνεχής συνάρτηση σε ένα σημείο δεν είναι διαφορίσιμη σε αυτό το σημείο.**

**Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι ασυνεχείς σε ένα σημείο και που έχουν μια παράγωγο σε αυτό το σημείο. .**

**Exanple:**

**Συνάρτηση f : Η RR, 🡪που δίνεται παρακάτω, είναι ασυνεχής σε x0 = 0 και f'(0) = + ∞.**

****

# ****Πλευρικά παράγωγα****

**Ας είναι η συνάρτηση f:DR 🡪και x0 Є D.**

# ****Προέρχεται από τα αριστερά****

****

# ****Προέρχεται από τα δεξιά****

****

**Η συνάρτηση f έχει παράγωγο και είναι διαφορίσιμη σε x0 αν και μόνο αν έχει πλευρικές παραγώγους και είναι, αντίστοιχα, αριστερή και δεξιά διαφορίσιμη σε x0 και::**

****

# ****Ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο****

**Αν f:ER όπου E είναι ένα διάστημα ή μια ένωση διαστημάτων από R**

**Λέγεται ότι η συνάρτηση f έχει μια παράγωγο στο în εάν το όριο υπάρχει σε**

**Σε αυτή την περίπτωση, αυτό το όριο συμβολίζεται με και ονομάζεται παράγωγος της συνάρτησης f στο **

**Έτσι**

**Η συνάρτηση f λέγεται ότι προκύπτει από το αν το όριο υπάρχει in R**

**(υπάρχει και είναι πεπερασμένο)**

**Στην περίπτωση αυτή, το όριο αυτό συμβολίζεται με , δηλαδή**

**Μια συνάρτηση f λέγεται ότι είναι διαφορίσιμη σε ένα διάστημα I αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος I.**

# ****Παρατηρήσεις****

**Η συνάρτηση f έχει μια παράγωγο σε x0 f είναι παράγωγος πλευρικός în x0 και**

**(  υπάρχει σε ?**  ** υπάρχει στο  )**

# ****Πίνακας με παράγωγα στοιχειωδών συναρτήσεων****

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ΛΕΙΤΟΥΡΓΊΑ** | **ΠΑΡΆΓΩΓΟ** | **ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΑΦΟΡΟΤΗΤΑΣ** | **ΣΥΝΤΕΘΕΙΜΕΝΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ** | **ΠΑΡΆΓΩΓΟ** |
| **c (σταθερά)** | **0** |  |  |  |
| **x** | **1** |  | **στο** |  |
| **x** |  |  |  |  |
| **x**  **( )** |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| **ι ι** |  |  | **κ ο ι ν ο βο ύ λ** |  |
|  |  |  |  |  |
| **χωρίς x** | **σώμα x** |  | **γιος στο** | **κ ο ι ν ο βο ύ λ** |
| **σώμα x** | **- χωρίς x** |  | **κ ο ι ν ο βο ύ λ** | **- γιος σε** |
| **τγ χ** |  | **σώμα x** | **τὸ δ ̓ ἐν τ** |  |
| **ctg x** | **-** | **χωρίς x** | **ctg u (αμαρτία u)** |  |
| **τόξσιν x** |  | **(-1;1)** | **τόξσιν u** |  |
| **τόξος x** | **-** | **(-1;1)** | **τόξος u** |  |
| **τόξο x** |  |  | **ἐν τ** |  |
| **τόξο x** | **-** |  | **τόξο** |  |

# ****Λειτουργίες με παράγωγες συναρτήσεις****

****

****

****

****

** ( c = σταθερά)**

****

****

****

# ****Συμπεράσματα****

**Ημελέτη των συναρτήσεων γενικά, των συνεχών, παραγωγικών συναρτήσεων ειδικότερα, απαιτεί την ανάπτυξη γενικών και ειδικών δεξιοτήτων που αντανακλώνται σε:**

**Γραφική/οπτική αναγνώριση των ιδιοτήτων μιας αριθμητικής συνάρτησης, όσον αφορά: την οριοθέτηση, τη συνέχεια, την ασυμπτωτική τάση, την παραγωγιμότητα·**

**Η συσχέτιση δεδομένων, που εξάγονται από μια προβληματική κατάσταση, με ιδιότητες των αριθμητικών συναρτήσεων που μελετήθηκαν, όπως: θεωρήματα σύγκλισης, οριακές πράξεις, όρια τύπων, πίνακες παραγωγής.**

**Η εφαρμογή συγκεκριμένων αλγορίθμων, ο διαφορικός υπολογισμός, στην επίλυση ορισμένων προβλημάτων και στη μοντελοποίηση ορισμένων συγκεκριμένων διαδικασιών, ορισμένων πεδίων δραστηριότητας.**

**Η έκφραση στη γλώσσα της μαθηματικής ανάλυσης, συγκεκριμένων θεωρημάτων, τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν με αριθμητικές συναρτήσεις.**

**Ερμηνεία, με βάση τη γραφική ανάγνωση, των ιδιοτήτων ορισμένων συναρτήσεων, οι οποίες αντιπροσωπεύουν παραδείγματα από τον οικονομικό, κοινωνικό, επιστημονικό τομέα.**

**Πειραματική επαλήθευση των αποτελεσμάτων, που συνάγεται από τον υπολογισμό, για πρακτικά προβλήματα που μπορούν να εκφραστούν μαθηματικά.**

**Προσδιορισμός κάποιου περιστασιακού optima, με την εφαρμογή διαφορικού λογισμού, σε πρακτικά ή ειδικά προβλήματα ορισμένων τομέων δραστηριότητας.**

**Χρήσιμες εφαρμογές της παραγώγου μιας συνάρτησης**

**προσδιορισμός των διαστημάτων μονοτονικότητας για μια δεδομένη συνάρτηση (είναι η συνάρτηση που αυξάνεται ή μειώνεται) – αυτό γίνεται μελετώντας το σημάδι της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης.**

**προσδιορισμός των ακραίων σημείων για μια εκτεταμένη κατηγορία αριθμητικών συναρτήσεων - αυτό γίνεται μελετώντας το σημάδι της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης.**

**τα θεωρητικά αποτελέσματα σχετικά με τη μονοτονία και τα ακραία σημεία μιας συνάρτησης επιτρέπουν την επίτευξη ορισμένων ανισοτήτων οι οποίες, με τη βοήθεια στοιχειωδών μεθόδων, θα ήταν δύσκολο να αποδειχθούν·**

**προσδιορισμός των διαστημάτων κυρτότητας ή κοιλότητας μιας συνάρτησης - αυτό γίνεται μελετώντας το σημάδι της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης.**

**με τη βοήθεια της παραγωγιμότητας είναι δυνατόν να καθοριστεί η σειρά πολλαπλότητας των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ή των διαστημάτων στα οποία βρίσκονται οι ρίζες μιας εξίσωσης που σχετίζεται με μια πολυωνυμική συνάρτηση.**

# ****Πηγές****

**Gheorghe Cârjă, Ovidiu Cârjă – Analiza matematică, Culegere de probleme rezolvat şi comentate, Editura GIL, Zalău, 2003·**

**Λία Αραμά, Τοντέρ Μοροζάν – Culegere de probleme de analiza matematică, Editura Universal Pan, Bucureşti, 1997·**

**Μάριους Μπουρτέα, Τζορτζέτα Μπουρτέα – Μαθηματικά, εγχειρίδιο για την XI-th τάξη, Εκδοτικός Οίκος Carminis, Piteşti, 2006.**

**Mircea Ganga – Προβλήματα που επιλύθηκαν από εγχειρίδια μαθηματικών για την XI-th τάξη, Εκδοτικός Οίκος MATHPRESS, Πλοέστι, 2006.**

# Φύλλο εργασίας

1. Έστω f : R → R, f(x)=-3+5
2. Υπολογίζω
3. Υπολογίστε το f'(x)
4. Υπολογίστε f'(-1) + f''(-1)
5. Γράψτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης f με το σημείο τετμημένης
6. Υπολογίζω
7. Υπολογίζω
8. Προσδιορίστε τα διαστήματα μονοτονικότητας και τα ακραία σημεία της συνάρτησης f.
9. Προσδιορίστε το σημείο καμπής του