

**Αόριστα Ολοκληρώματα**

Σχολική βαθμίδα: Κ12

**Περιεχόμενο**

[Ορισμένες ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος 2](#_heading=h.gjdgxs)

[Πίνακας αόριστων ολοκληρωμάτων (άμεσα πρωτόγονα) 3](#_heading=h.30j0zll)

[Ολοκληρώματα υπερβολικών συναρτήσεων 5](#_heading=h.1fob9te)

[Το θεώρημα και οι τύποι για την ολοκλήρωση κατά μέρη 6](#_heading=h.3znysh7)

[Θεωρήματα και τύποι ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής (υποκατάσταση) για το αόριστο ολοκλήρωμα 7](#_heading=h.2et92p0)

[Η φυσική έννοια του αόριστου ολοκληρώματος 8](#_heading=h.tyjcwt)

[Δοκιμή 9](#_heading=h.3dy6vkm)

# Ορισμένες ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος

**Θεώρημα 9:** Αν οι συναρτήσεις *f*: *I*→ R şi : *I*→ R δέχονται πρωτόγονα στο διάστημα I και η συνάρτηση f έχει μια συνεχή παράγωγο στο διάστημα I, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:



1. πού



1. , όπου



1. , όπου η σταθερά



1. , όπου η σταθερά



1. , όπου η σταθερά



1. .



# Πίνακας αόριστων ολοκληρωμάτων (άμεσα πρωτόγονα)

1. , όπου;



1. , όπου ;



1. , όπου , και ή ;



1. , όπου , ή ;



1. , όπου , ;



1. ,;



1. , όπου ή ;



1. , όπου ;



1. , όπου ;



1. , όπου ;



1. , όπου ;



1. , όπου ;



1. , όπου και ;



1. , όπου ;



1. , όπου ;



1. , όπου ή ;



1. , όπου ή και ;



1. , όπου ή ;



1. , όπου και ;



1. , όπου ;



1. , όπου ;



1. , όπου και ;



1. , όπου και ;



1. , όπου και x2



1. , όπου και x2



1. , όπου και



1. , όπου ε και ;



1. , όπου και ;



1. ; 30) ;



# Ολοκληρώματα υπερβολικών συναρτήσεων

α) ἐν ἐ c) ; d) .



31) , όπου;



32) , όπου;



33) , όπου ;



34) , όπου ή ;



35) , όπου \{1}.



36) +*Γ*, όπου .



38) +*Γ*, όπου .



# Το θεώρημα και οι τύποι για την ολοκλήρωση κατά μέρη

**Θεώρημα 10:** Αν οι συναρτήσεις  ***f*:*I R*→** şi ***g*:*I R*→** είναι διαφορίσιμες και έχουν συνεχή παράγωγο στο διάστημα *I*, τότε οι συναρτήσεις şi δέχονται πρωτόγονα στο διάστημα I και ο τύπος ισχύει:



(1)



**Παρατήρηση:** Αν σημειώσουμε şi , τότε ο τύπος (1) παίρνει την πιο χρήσιμη μορφή:



(2)



**• Οι τύποι (1) και (2) ονομάζονται τύποι ολοκλήρωσης κατά μέρη για το αόριστο ολοκλήρωμα.**

# Θεωρήματα και τύποι ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής (υποκατάσταση) για το αόριστο ολοκλήρωμα

**Θεώρημα 11 (η πρώτη αλλαγή του μεταβλητού τύπου):** Εάν η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο διάστημα Ι και η συνάρτηση δέχεται εύρος πρωτόγονα *J και* είναι μια συνάρτηση πρωτόγονη , τότε η συνάρτηση είναι μια συνάρτηση πρωτόγονη και ο τύπος εμφανίζεται



**Μέθοδος υποκατάστασης για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος (μέθοδος πρώτης μεταβλητής μεταβολής)::**

α) Εάν η υποκατάσταση γίνει



= .



β) Εάν η αντικατάσταση γίνει



= .



**Θεώρημα 12: (δεύτερη αλλαγή του μεταβλητού τύπου):** Εάν η συνάρτηση είναι αμφίδρομη και διαφορίσιμη στο διάστημα *Ι,* η συνάρτηση δέχεται εύρος πρωτόγονων *J και H* είναι μια συνάρτηση πρωτόγονη , τότε η συνάρτηση υποστηρίζει πρωτόγονα και η συνάρτηση είναι πρωτόγονη της συνάρτησης f και ο τύπος εμφανίζεται.



**Παρατήρηση:** Πρακτικά, κατά τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος με τη δεύτερη μέθοδο αλλαγής μεταβλητής, σημειώνεται , από πού προέρχεται και εφαρμόζεται ο τύπος:



.



# Η φυσική έννοια του αόριστου ολοκληρώματος

**Ι φυσική έννοια του αόριστου ολοκληρώματος:**

• Αν ένα κινητό (υλικό σημείο) κινείται ανομοιόμορφα και ο νόμος της μετατόπισής του είναι , και ο νόμος της μεταβολής της ταχύτητάς του είναι , τότε:



1) Από τη φυσική έννοια της παραγώγου έχουμε: ?



2) Από τη φυσική έννοια του αόριστου ολοκληρώματος έχουμε:



**II φυσική έννοια του αόριστου ολοκληρώματος:**

• Αν ένα κινητό (υλικό σημείο) κινείται άνισα και ο νόμος της κίνησής του είναι , ο νόμος της μεταβολής της ταχύτητάς του είναι , και ο νόμος της μεταβολής της επιτάχυνσής του είναι , τότε:



1) Από τη φυσική έννοια της παραγώγου έχουμε: sau ?



2) Από τη φυσική έννοια του αόριστου ολοκληρώματος έχουμε: ?



3) Από τη φυσική έννοια του αόριστου ολοκληρώματος έχουμε: .



**ΙΙΙ φυσική έννοια του αόριστου ολοκληρώματος:**

Εάν ένα υλικό σημείο κινείται κατά μήκος του άξονα του Βοδιού κάτω από τη δράση της δύναμης , τότε ο νόμος της διακύμανσης της εργασίας που γίνεται υπό τη δράση της δύναμης *F* είναι : .



# Δοκιμή

Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα:

| Όχι | | Παραλλαγή Ι | Παραλλαγή ΙΙ | Παραλλαγή ΙΙΙ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  | \* | |  |  |
|  | \* | |  |  |