

Vektorien välinen kulma tasossa

Sisällys

**No table of contents entries found.**

# Johdanto

Vektoreilla on merkittävä rooli geometriassa ja fysiikassa. Erityisesti vektorien suunta sekä niiden suuntautumiskulma ovat ratkaisevassa asemassa, kun halutaan tarkastella kahden vektorin yhdistelmän tuottamaa vaikutusta.

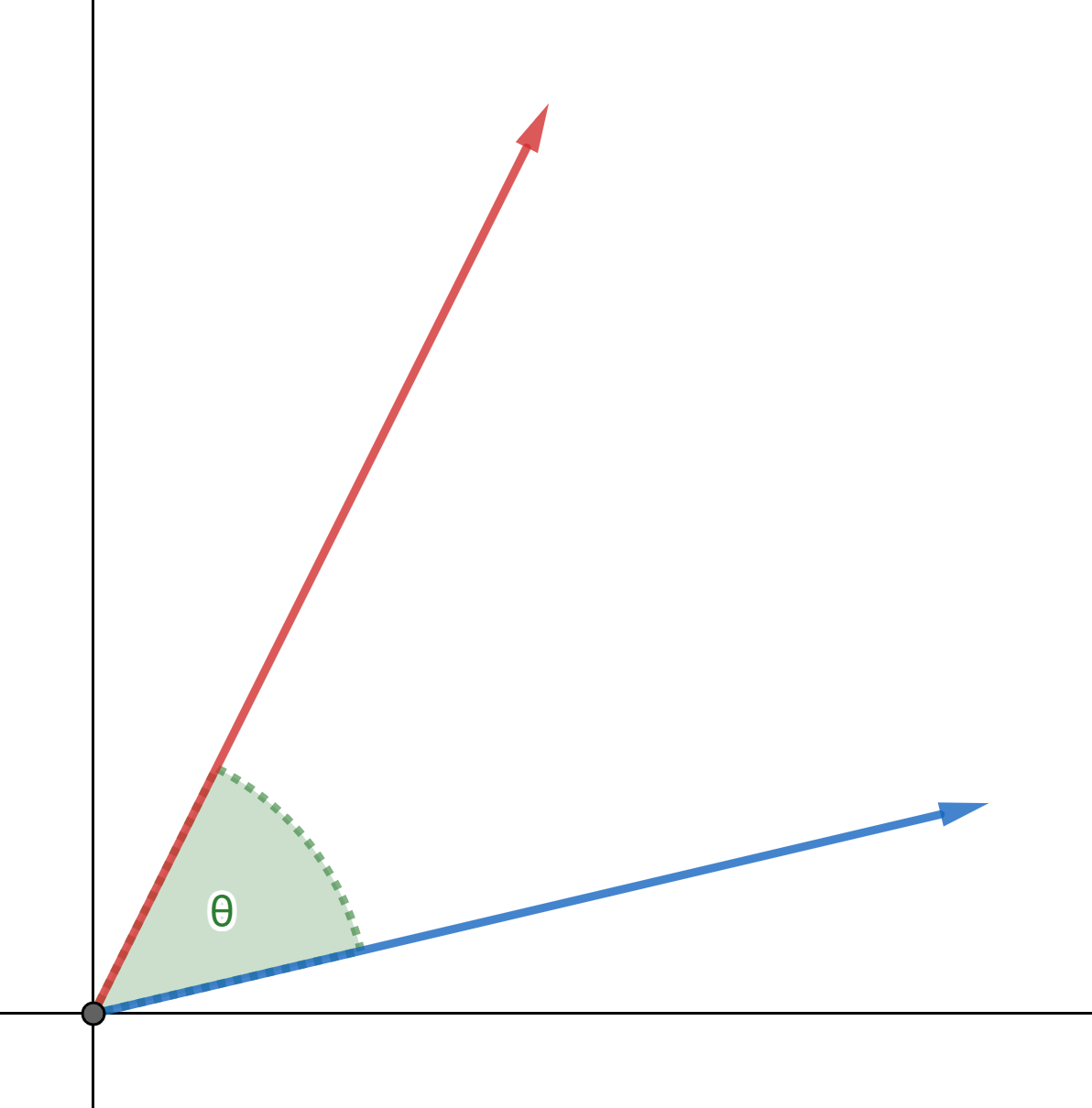
Jos esimerkiksi tarkastellaan jalkapallon liikettä pelin aikana, pallon aseman suhdetta kentän keskustaan voidaan kuvata paikkavektorilla. Pallon liikettä voidaan vuorostaan kuvata nopeusvektorilla, jonka pituus ilmaisee pallon nopeutta: mitä pidempi vektori on, sitä nopeammin pallo liikkuu. Nopeusvektorin suunta määrittää pallon liikkeen suunnan.

Joskus tarkastelun kohteena voi olla kaksi vektoria, jotka vaikuttavat samassa kohteessa. Tällöin vektorien välinen kulma on ratkaiseva. Tosielämässä monia vektorien yhdistelmiä esiintyy kaikissa mahdollisissa järjestelmissä.

Jos tason kaksi vektoria ovat kiinnittyneitä toisiinsa hännistään, vektorien välinen kulma voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

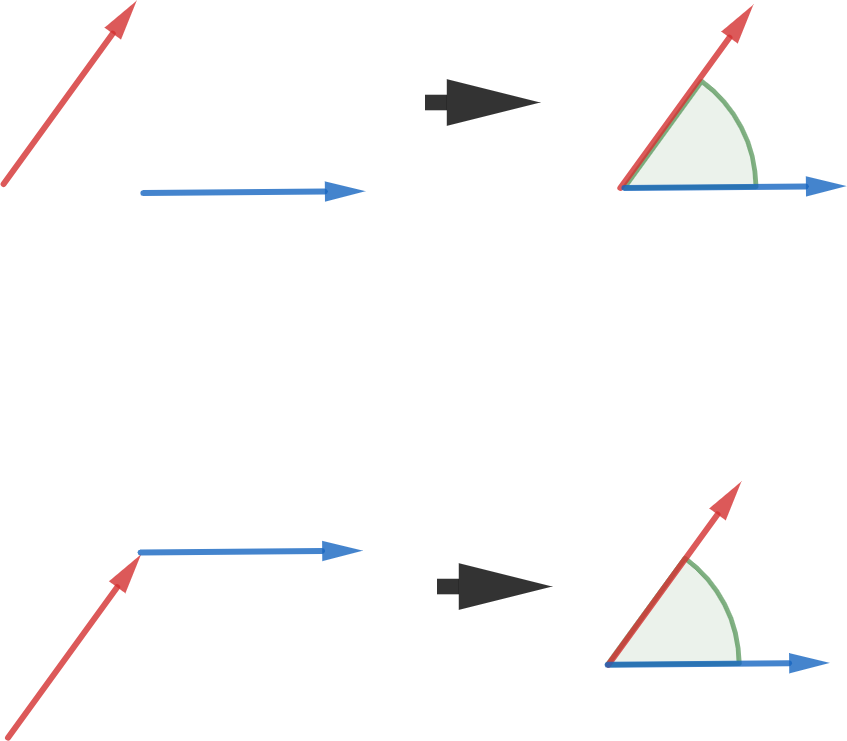
*“Kahden vektorin välinen kulma on se pienin kulma, jonka ympärille jompi kumpi kahdesta vektorista on kiertynyt siten, että molemmilla vektoreilla on sama suunta”.*

Vektorien tarkastelu keskittyy tässä pienimmän kulman määrittämiseen. Seuraavaksi tarkastellaan vektorien välistä kulmaa, kun vektorit sijaitsevat normaalitilassa.  
  
*“Vektorin voidaan todeta olevan normaalitilassa, jos sen alkukohta sijaitsee origossa (0, 0).”*

**

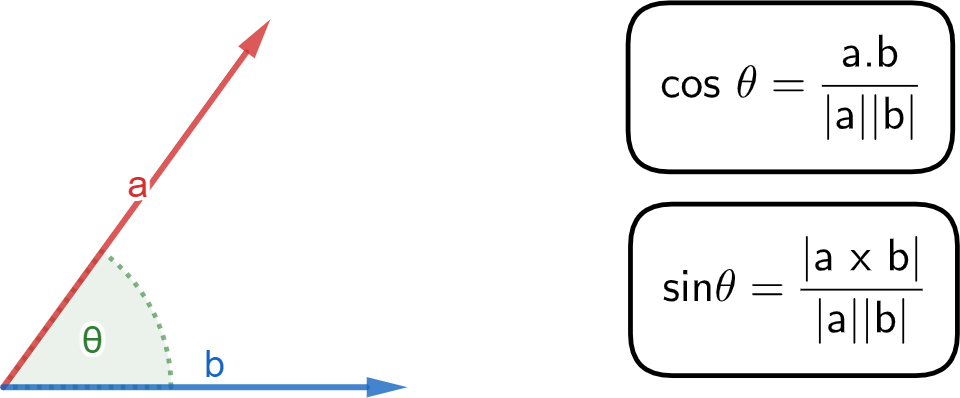
Toisin sanoen vektorien välisellä kulmalla tarkoitetaan niiden häntien välistä kulmaa. Huomaa, että vektorien välisen kulman suuruus on aina 0° ja 180° välillä.

Jos vektorit eivät ole kiinni toisissaan, ne tulee liittää yhteen siirtämällä jompaa kumpaa vektoreista.



Vektorien välisen kertolaskun avulla on mahdollista määrittää kahden vektorin välinen kulma. Vektorien väliseen kertolaskuun voidaan käyttää kahta menetelmää: skalaarituloa tai ristituloa.

Kahden vektorin skalaaritulon avulla voidaan laskea kahden vektorin skalaarin suuruus. Kahden vektorin vektoritulon (tai ristitulon) avulla saadaan vuorostaan selville vektorien suuruus.



**Kahden vektorin välinen kulma pistetulon avulla**

Tarkastellaan vektoreita a ja b, joiden välissä on jokin kulma θ. Pistetulon kaava on:

missä **a.b** merkitsee kahden vektorin välistä pistetuloa. |a| ja |b| ovat vektorien **a** ja **b** itseisarvojaja θ niiden välinen kulma.  
Edeltävä kaava esittää, että vektorien a ja b välinen pistetulo on yhtä suuri kuin niiden itseisarvojen tulo kerrottuna kosinin kulmalla.  
Jotta kulman suuruus voidaan määrittää, tarkastellaan pistetulon määritelmää.  
Aloitetaan määrittämällä kosinin arvo:

Lopuksi jotta vektorien välinen kulma voidaan ratkaista, määritetään kulma θ.

Tarkastellaan lähemmin vektorien **a** ja **b** välistä pistetuloa

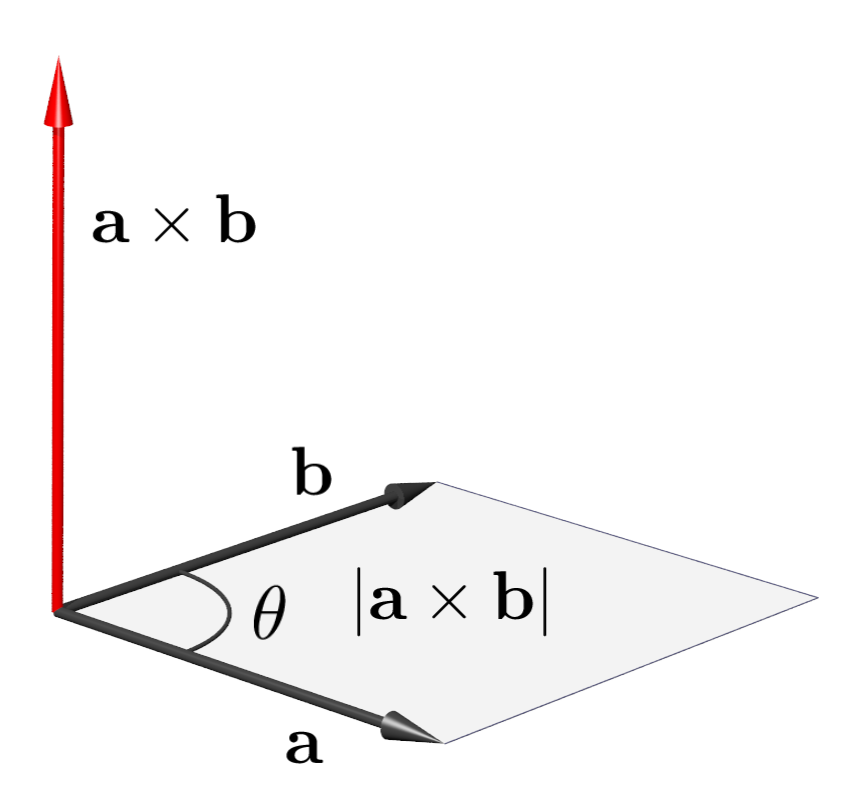
Vektorien **a** ja **b** välinen pistetulo voidaan merkitä seuraavalla tavalla:

**. = +**

**Kahden vektorin välinen kulma ristitulon avulla**

Kahden vektorin välinen kulma voidaan määrittää myös ristitulon avulla.  
Ristitulon määritellään seuraavalla tavalla:

*“Vektori, joka on kohtisuorassa molempien vektorien suhteen ja jonka suunta saadaan oikean käden säännöllä.“*

**

Ristitulon kaava on:

missä **θ** merkitsee vektorien välistä kulmaa, |a| ja |b| ovat vektorien a ja b itseisarvoja ja **n** on tasoa kohtisuorassa oleva yksikkövektori, joka sisältää **a:n** ja **b:n**. Sen suunta määräytyy oikean käden säännön avulla.

Jotta θ voidaan ratkaista, määritetään molempien jäsenten itseisarvot:

Koska n on yksikkövektori, sen itseisarvo on 1. Saadaan:

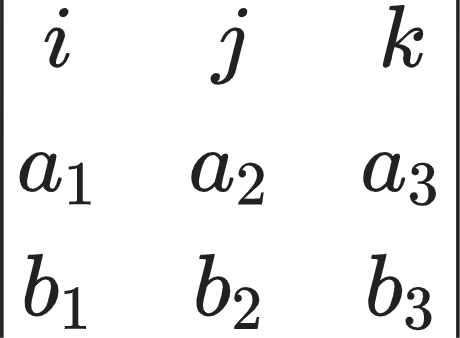
Määritetään sinθ:n arvo, jotta vektorien välinen kulma voidaan ratkaista

Lopulta kulman suuruudeksi saadaan:

Tarkastellaan ristituloa lähemmin. Koska tehtävässä käytetään ristituloa, tehtävässä tulee myös huomioida kolmas ulottuvuus, sillä ristitulo on tasoa kohtisuorassa oleva vektori, joka sisältää a:n ja b:n (jolloin se ei pysy samassa tasossa).

Yleisesti ottaen esimerkkeinä voidaan käyttää kahta kolmiulotteista vektoria a ja b: kuten

Ristitulo voidaan esittää matriisin determinanttina



missä on positiivisesti suuntautunut orthonormaalilla tasolla.

Kun lasketaan determinantti, saadaan

tästä saadaan seuraava vastaus

Koska tässä esimerkissä tarkastellaan vektorien välistä kulmaa xy-tasossa, **a:n** ja **b:n** merkintätapaa voidaan yksinkertaistaa asettamalla 0 kolmanneksi komponentiksi, jolloin niistä tulee kaksiulotteisia vektoreita. Tulee kuitenkin muistaa, että ristitulon tulokseksi saadaan kohtisuora vektori, joka on kohtisuorassa

xy-tasossa ja joka sisältää **a:n** ja **b:n**.

Jos edelliset kaavat lasketaan uudestaan, jossa **a:n** ja **b:n** katsotaan kuuluvan osaksi xy-tasoa (joten ), saadaan:

**Mallitehtävät**

**Esimerkki 1**

*Tehtävä:*

Määritä vektorien **a** = <1, 2> ja **b** = <-2, -1> välinen kulma pistetulon avulla.

*Ratkaisu:*

Olkoon θ vektorien a ja b välinen kulma.

Määritetään vektorien välinen kulma θ pistetulon avulla.

Jotta kaavaa voidaan hyödyntää, tulee laskea pistetulo ja molempien vektorien itseisarvot.

Kulman suuruudeksi voidaan arvioida:

**143.13°**

**Esimerkki 2**

*Tehtävä:*

Määritä vektorien **a** = <1, 2> ja **b** = <-2, -1> välinen kulma **ristitulon** avulla.

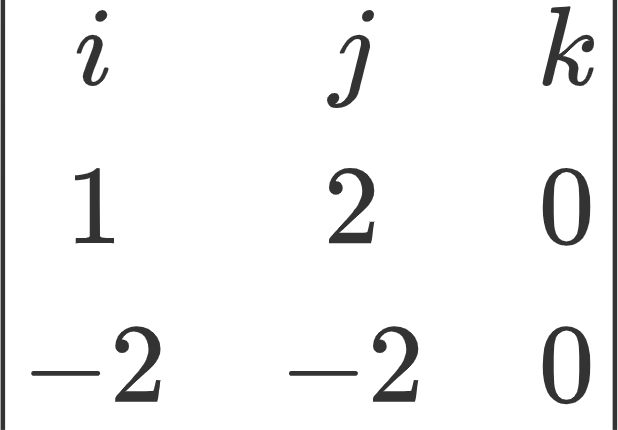
*Ratkaisu:*

Olkoon θ a:n ja b:n välinen kulma. Ratkaise vektorien välinen kulma θ ristitulon avulla.

Koska tehtävässä käytetään ristituloa, tehtävässä tulee huomioida myös kolmas ulottuvuus. Tehtävässä tulee siis laajentaa vektoreita kolmanteen ulottuvuuteen.

Muutetaan a:n ja b:n merkintätapaa:

Lasketaan a:n ja b:n ristitulo.



Selvitetään itseisarvo.

Käytetään kaavaa kulman arvon selvittämiseksi

Saadaan

Vastaukseksi saadaan θ ≈ **36.87 (tai) 143.13°** (= 180 - 36.87) (sini on positiivinen myös toisessa neljänneksessä).

**Esimerkki 3**

*Tehtävä:*

Määritä vektorien **a** = <0, 5> ja **b** = <2, 0> välinen kulma **pistetulon** avulla.

*Ratkaisu:*

Olkoon θ vektorien a ja b välinen kulma.

Määritetään vektorien välinen kulma θ pistetulon avulla.

Jotta voimme hyödyntää kaavaa , meidän tulee laskea molempien vektorien pistetulo sekä itseisarvo.

Nyt kulman suuruudeksi saadaan:

**90°**

*Huomioita*:

Tehtävän ratkaisua voidaan nopeuttaa muutamalla toimenpiteellä.  
Ensinnäkin :n ja :n arvojen laskemista voidaan yksinkertaistaa, sillä ne ovat yksiulotteisia vektoreita (yksi niiden komponenteista on 0), jolloin niiden jakojäännös on yhtä suuri kuin ne komponentit, joiden arvo ei ole nolla.

Itse asiassa :n ja :n laskeminen, yksinkertaisuudestaan huolimatta, ei ole ollenkaan tarpeellista. Koska saimme selville, että on yhtä suuri kuin ja että tämä on arccos-muuttujan osoittaja, tällöin nimittäjää ei ole tarpeen määrittää.

Lopulta tämä tehtävä voitaisiin ratkaista kokonaan ilman yhtään laskutoimitusta, mutta kuitenkin vain geometristen huomioiden avulla. Koska **a** on pystyvektori (sen x-komponentti on 0) ja **b** on vaakavektori (sen y-komponentti on 0), voidaan päätellä, että ne ovat kohtisuoria vektoreita, jolloin niiden välinen kulma on 90°.