

**Tarkat integraalit**

Koululuokka: K12

**Sisältö**

[Jotkut määrittelemättömän integraalin ominaisuudet 2](#_Toc126247569)

[Table of indefinite integrals (immediate primitives) 3](#_Toc126247570)

[Hyperbolisten funktioiden integraalit 5](#_Toc126247571)

[Osien integroinnin lause ja kaavat 6](#_Toc126247572)

[Lauseet ja integrointikaavat muuttujan muutoksella (substituutiolla) epämääräiselle integraalille 7](#_Toc126247573)

[Epämääräisen integraalin fyysinen merkitys 8](#_Toc126247574)

[Testata 9](#_Toc126247575)

# Jotkut määrittelemättömän integraalin ominaisuudet

**Lause 9:** Jos toiminnot *f*: *I* →R ja ****: *I* →R sallia primitiivit välissä I ja funktiolla f on jatkuva derivaatta välissä I, niin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

1. 
2. , unde 
3. , missä 
4. , missä vakio 
5. 
6. , missä vakio 
7. , missä vakio 
8. 
9. 
10. .

# Table of indefinite integrals (immediate primitives)

1. , where;
2. , where ;
3. , where , şi  sau ;
4. , missä , ,or ;
5. , missä , ;
6. ,;
7. , missä or ;
8. , missä ;
9. , missä ;
10. , missä ;
11. , missä ;
12. , missä ;
13. , missä ja ;
14. , missä ;
15. , missä ;
16. , missä  or ;
17. , missä  or  ja ;
18. , missä  or ;
19. , missä  ot  ja ;
20. , missä ;
21. , missä ;
22. , missä and ;
23. , missä and ;
24. , missä  ja x2
25. , missä ja x2
26. , missä ja 
27. , missä e ja ;
28. , missä ja ;
29. ; 30) ;

# Hyperbolisten funktioiden integraalit

a) ; b) ; c) ; d) .

31) , missä ;

32) , missä ;

33) , missä ;

34) , missä or ;

35) , missä \{1}.

36) +*C*, missä .

38) +*C*, missä .

# Osien integroinnin lause ja kaavat

**Lause 10:** Jos toiminnot ***f*:*I* →*R*** ja ***g*:*I* →*R*** ovat differentioituvia ja niillä on jatkuva derivaatta välillä I, sitten funktiot ja  hyväksy primitiivit välissä I ja kaava pätee:

 (1)

**Huomautus:**Jos huomioimme şi , silloin kaava (1) saa hyödyllisemmän muodon:

 (2)

**• Kaavoja (1) ja (2) niitä kutsutaan osien integroinnin kaavoiksi määrittelemättömälle integraalille.**

# Lauseet ja integrointikaavat muuttujan muutoksella (substituutiolla) epämääräiselle integraalille

**Lause 11 (muuttujakaavan ensimmäinen muutos):** Jos toiminto  on differentioituva intervallilla I ja funktiolla  hyväksyy alueen primitiivit *J ja*  on primitiivinen funktio , sitten funktio  on primitiivinen funktio  ja kaava tapahtuu



**Korvausmenetelmä määrittelemättömän integraalin laskemiseksi (ensimmäisen muuttujan muutoksen menetelmä):**

a) Jos vaihto tehdään 

= .

b) Jos vaihto tehdään 

= .

**Lause 12: (muuttujakaavan toinen muutos):** Jos toiminto  on bijektiivinen ja differentioituva välillä I, funktio  hyväksyy alueen primitiivit J ja H on funktioprimitiivi , sitten funktio  tukee primitiiviä ja funktiota  on funktion f primitiivinen ja kaava esiintyy.



**Huomautus:** Käytännössä se huomioidaan laskettaessa epämääräistä integraalia toisen muuttujan muutosmenetelmällä , mistä se on kotoisin  ja kaavaa sovelletaan:

.

# Epämääräisen integraalin fyysinen merkitys

**I määrittelemättömän integraalin fyysinen merkitys:**

• Jos liikkuva (materiaalipiste) liikkuu epätasaisesti ja sen siirtymälaki on , ja sen nopeuden vaihtelun laki on , sitten:

1) Meillä on johdannaisen fyysisestä merkityksestä: ;

2) Meillä olevan määrittelemättömän integraalin fyysisestä merkityksestä: 

**II määrittelemättömän integraalin fyysinen merkitys::**

• Jos liikkuva (materiaalipiste) liikkuu epätasaisesti ja sen liikkeen laki on , sen nopeuden vaihtelulaki on , ja sen kiihtyvyyden vaihtelulaki on , sitten:

1) Meillä on johdannaisen fyysisestä merkityksestä: sau ;

2) Meillä olevan määrittelemättömän integraalin fyysisestä merkityksestä: ;

3) Meillä olevan määrittelemättömän integraalin fyysisestä merkityksestä: .

**III määrittelemättömän integraalin fyysinen merkitys:**

Jos materiaalipiste liikkuu Ox-akselia pitkin voiman vaikutuksesta , sitten voiman vaikutuksesta tehdyn työn vaihtelun laki *F* on : .

# Testata

Laske epämääräiset integraalit:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Nr | | Variantti I | Variantti II | Variantti III |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  | \* | |  |  |
|  | \* | |  |  |