****

**Funzione di primo grado e**

**funzione di secondo grado**

Grado scolastico: K9

**Contenuto**

[FUNZIONE DI PRIMA ELEMENTARE 3](#_heading=h.gjdgxs)

[Definizione 3](#_heading=h.30j0zll)

[Perché "funzione di primo grado"? 4](#_heading=h.1fob9te)

[Proprietà della funzione di primo grado 4](#_heading=h.3znysh7)

[Monotonicità della funzione di primo grado 6](#_heading=h.2et92p0)

[*Osservazioni* 7](#_heading=h.tyjcwt)

[Il segno della funzione di primo grado 8](#_heading=h.3dy6vkm)

[I valori della funzione di primo grado 8](#_heading=h.1t3h5sf)

[Punto di scambio 10](#_heading=h.4d34og8)

[Esempi pratici 11](#_heading=h.2s8eyo1)

[Trovare il segno delle seguenti funzioni: 11](#_heading=h.17dp8vu)

[Disuguaglianze di primo grado 12](#_heading=h.3rdcrjn)

[Come si calcola? 12](#_heading=h.26in1rg)

[II FUNZIONE DI GRADO 17](#_heading=h.lnxbz9)

[Definizione della funzione di secondo grado 17](#_heading=h.35nkun2)

[Rappresentazione grafica della funzione di secondo grado 17](#_heading=h.1ksv4uv)

[Il minimo e il massimo della funzione di secondo grado. L'immagine della funzione di secondo grado. 18](#_heading=h.44sinio)

[Monotonia functiei de gradul II 19](#_heading=h.2jxsxqh)

[Forma canonica a funzione del grado II 19](#_heading=h.z337ya)

[Pozitia parabolei fata de axa Ox. Intersezione dei grafici con l'asse di coordinamento. Funzioni semantiche di livello II 19](#_heading=h.3j2qqm3)

[Le relazioni tra radici e coefficienti (relazioni di Viète). La forma lineare della funzione di secondo grado. 22](#_heading=h.1y810tw)

[*Disuguaglianze della forma ax2 +bx+c* 0 (,,), studiate su o su intervalli di numeri reali 23](#_heading=h.4i7ojhp)

[*Sistemi di disequazioni di secondo grado, studiati su o su intervalli di numeri reali* 23](#_heading=h.2xcytpi)

[Sistemi di equazioni di secondo grado 24](#_heading=h.1ci93xb)

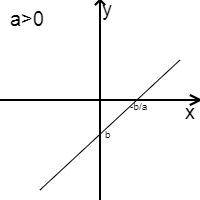
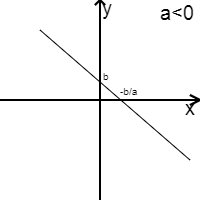
[Esercizi 26](#_heading=h.3whwml4)

# **FUNZIONE DI PRIMA ELEMENTARE**

**Definizione**

La funzione f:R→R,f(x)=ax+b,a,b∈R,a≠0 è detta funzione di primo grado.

La rappresentazione geometrica del grafico della funzione di primo grado è una retta.

Se a>0 la funzione è strettamente crescente e se a<0 la funzione è strettamente decrescente.

Una funzione di primo grado è solo una funzione ordinaria che ha la forma:

f(x)=a⋅x+bf(x)=a⋅x+b, dove a e b sono due numeri reali.

Ora, sarebbe bene che avessimo a≠0a≠0, perché se fosse 00, allora avremmo solo una funzione costante, della forma f(x)=bf(x)=b, che restituisce sempre lo stesso valore.

Alcuni esempi di funzioni di primo grado sono:









## Perché "funzione di primo grado"?

Tutto si riduce a quale potenza ha x. Nel nostro caso è la potenza di 1, ovvero



Una funzione di primo grado ha anche un'equazione:



Ad esempio, le seguenti funzioni hanno ciascuna un'equazione allegata:

 ha un'ecuazione 

 avrà un'ecuazione , dove a è 

La funzione è una funzione di primo grado con coefficienti .

La funzione è una funzione lineare con .

La funzione è una funzione costante quando 

## Proprietà della funzione di primo grado

Una funzione di primo grado è in definitiva una funzione lineare. Ciò significa che è rappresentata da una linea retta e che prende anche in prestito le proprietà di tale funzione. Tra cui::

Il grafico della funzione di primo grado è una linea retta, che ha una pendenza che possiamo calcolare

Per un'equazione , la formula per (pendenza della destra) è:



E nel caso di una funzione, non faremo altro che sostituire quello con . Pertanto, l'equazione della retta per una funzione di primo grado diventerà:



Infatti, la pendenza della retta è il coefficiente di x, ossia a, dalla forma generale della funzione 

1. Le coordinate di un punto a destra della funzione rappresentano anche una soluzione per l'equazione collegata alla funzione.
2. Come è normale, la soluzione di una funzione come questa , rappresenta le coordinate di un punto sul grafico della funzione. Ciò significa che questi numeri rappresentano anche la soluzione dell'equazione collegata alla funzione.
3. Più precisamente, se abbiamo una funzione e prendiamo un valore per x, diciamo , allora il punto apparterrà al grafico della funzione e sarà anche una soluzione dell'equazione 
4. Per rappresentare una funzione di primo grado, dobbiamo trovare l'intersezione del grafico con gli assi.

Poiché il grafico di questa funzione è una retta, abbiamo bisogno di 2 punti per rappresentarlo correttamente. I punti più facili da trovare sono le intersezioni del grafico con gli assi.

Ad esempio, per , si avrà:

* l'intersezione con l'asse y, quando ,

 e avremo il punto 

* e l'intersezione con l'asse x, quando 

cioè risulta che e abbiamo ancora il punto

# **Monotonicità della funzione di primo grado**

È importante, quando vogliamo saperne di più su una funzione, notare la sua monotonia.

Ovvero, se una funzione è crescente o decrescente.

La monotonicità della funzione di primo grado è data da a, il coefficiente di x, cioè:

* Quando a>0 la funzione è crescente
* Oppure, quando a<0 la funzione è decrescente ↘

Se pensiamo a f(x) come all'equazione di una retta, allora aa sarà la pendenza della retta. Più precisamente, a è quella m nella forma generale dell'equazione di una retta:

f(x)=a⋅x+b o 

y=m⋅x+n o 

E sappiamo che se la pendenza della destra è un numero positivo, allora la destra è crescente (cioè diretta verso l'angolo superiore destro).

***Dimostrazione***

Per verificare la monotonicità della funzione, si utilizzerà il tasso di aumento (diminuzione) di f,

 per 

Se allora f è strettamente crescente e se allora f è strettamente decrescente.

### ***Osservazioni***

1. **Il segno di a specifica la monotonicità della funzione di primo grado.**
2. L'ecuazione rappresenta una linea di pendenza (una linea obliqua non parallela all'asse Ox o all'asse Oy).

***Esercizi:***

Indicare la monotonia delle seguenti funzioni:

1. f(x)=4⋅x

A: la funzione è crescente, perché a>0, cioè a=4

2. f(x)=3-5⋅x

A: la funzione è decrescente, perché a<0a<0, più precisamente a=-5

3. f(x)=(m-1)⋅x+3

R: in questo caso, tutto dipende da m, più precisamente quando m-1 è minore o maggiore di 0.

Ad esempio, se si ha m-1>0⇒m>1 allora f(x) sarà crescente, perché il numero accanto a x (il coefficiente) è maggiore di 0,

ma quando m-1<0 o m<1 allora f(x) è decrescente.

# **Il segno della funzione di primo grado**

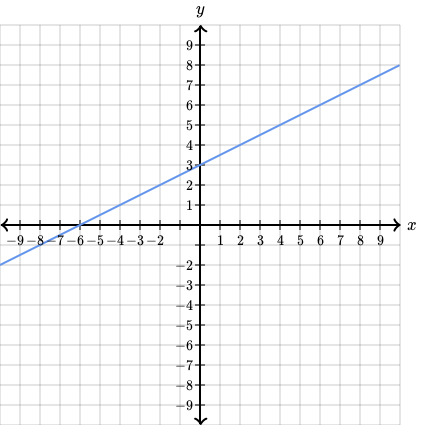
Di solito la funzione di primo grado è definita su ℝ, cioè si estende da -∞ a +∞.

Poiché la funzione è rappresentata da una retta, e la maggior parte delle volte la retta è obliqua, il grafico della funzione intersecherà l'asse Ox in un punto che ci dirà che metà del grafico è sopra l'asse e metà sotto.

## I valori della funzione di primo grado

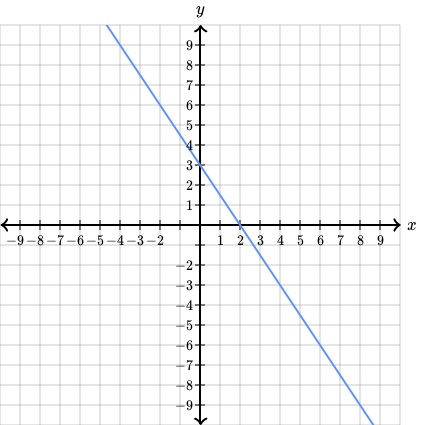
Se vogliamo sapere che tipo di numero restituirà la funzione, cioè se è positivo o negativo, possiamo innanzitutto osservare la monotonia della funzione.

Se a, il coefficiente di x, è positivo, il grafico della funzione è una retta crescente, come questa::



In questo caso, si osserva che fino al punto in cui x=-6, la funzione restituisce valori negativi (cioè, y<0). Dopo di che, restituisce solo valori positivi.

Se a<0 allora il grafico della funzione sarà una retta decrescente:



## Punto di scambio

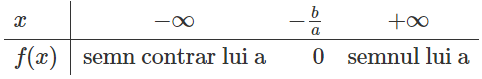
In entrambi i casi, abbiamo visto che la funzione restituirà valori di segno opposto ad a fino a un certo punto, e dopo di esso, con il segno di a.

Questo punto è chiamato anche radice dell'equazione perché in quel momento y=0.

Quindi per trovare quel punto dobbiamo avere f(x)=0 e se prendiamo la forma generale della funzione::

a⋅x+b=0, otterremo il valore di x 

Quindi, fino a la funzione ha il segno opposto di a e dopo, il segno di a. Lo vediamo nella tabella seguente:



## Esempi pratici

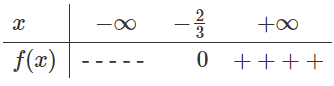
### Trovare il segno delle seguenti funzioni:

1. f(x)=3x+2

R: prima di tutto dobbiamo calcolare il punto in cui cambia il segno della funzione, cioè quando f(x)=0

3x+2=0 risulta che x= , quindi il segno della funzione sarà negativo fino a 

e positivo dopo di esso, come segue:

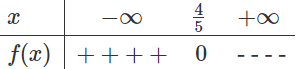


1. f(x)=4-5⋅x

R: calcoleremo il punto in cui il segno cambia::

-5⋅x=0 ⇒ -5⋅x=-4 ⇒ x= 

e avremo il segno opposto di a fino a questo punto, ma poiché a=-5, la funzione sarà positiva su questo intervallo e poi negativa:



# **Disuguaglianze di primo grado**

Per una funzione di primo grado come f(x)=7⋅x+8, possiamo creare una disuguaglianza della forma 7⋅x+8≥0 (o ≤0).

Questa disuguaglianza non è altro che l'espressione della funzione per la quale vogliamo calcolare i valori di x, che ci dicono i punti in cui la funzione è più piccola o più grande di 0. E quando diciamo che la funzione è più grande di 0, significa che restituisce numeri positivi.

**Perché?**

La ragione principale per creare una disuguaglianza da un'espressione di funzione è quella di imparare di più sulla funzione. Più precisamente, si può scoprire per quali valori di x la funzione sarà maggiore o minore di 0.

Non dobbiamo necessariamente farlo, ma solo se ci viene richiesto o se siamo particolarmente interessati a scoprire su quale intervallo la funzione restituisce valori positivi o negativi.

Possiamo infatti immaginare che qualsiasi disuguaglianza (della forma a⋅x+b≥0) abbia una funzione annessa e che, quando la risolviamo, impariamo qualcosa sulla funzione che ha la stessa espressione.

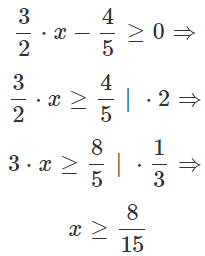
## Come si calcola?

La soluzione avviene nel modo normale di calcolare una disuguaglianza. L'interpretazione è quindi più interessante.

Ad esempio, supponiamo di avere una funzione:

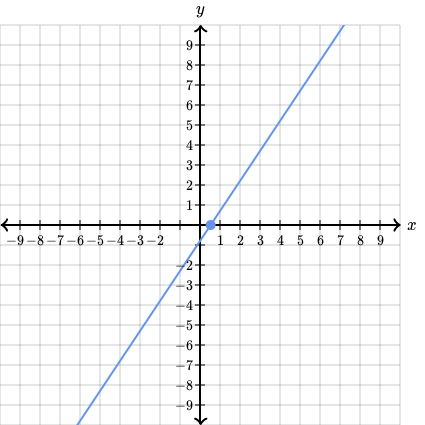


e calcoleremo per questa funzione, quando la sua equazione è maggiore di 0, cioè::

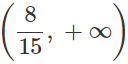


E si scopre che la funzione f(x) è sempre maggiore di 0 quando 

Quindi, è il punto dopo il quale la funzione restituirà solo valori positivi. E se osserviamo il grafico della funzione vediamo che (quasi ) rappresenta l'intersezione del grafico con l'asse Ox, al di sopra del quale, ovviamente, troveremo solo valori positivi.



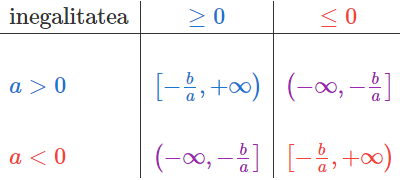
Ma questo punto rappresenta anche il punto in cui la funzione cambia segno, come abbiamo discusso nell'ultima lezione.

Quindi, la soluzione della nostra disuguaglianza , è l'intervallo che parte dall'intersezione della funzione con l'asse Ox e prosegue verso +∞, cioè .



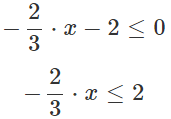
Ma in generale, tutte le soluzioni di queste disuguaglianze partono da un punto come e proseguono verso +∞ o -∞. Possiamo dedurre una definizione più generale, come::

La soluzione di una disequazione della forma a⋅x+b≥0a⋅x+b≥0 (o ≤0≤0) è l'intervallo che inizia (o finisce) con -b/a ma dipende da a, come segue::

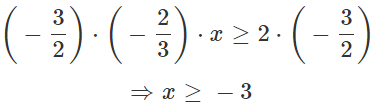


Facciamo l'esempio seguente per vedere esattamente come si usa questa tabella...

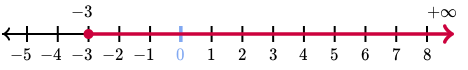
Supponiamo di avere la funzione e di voler sapere quando questa funzione è ≤ 0.



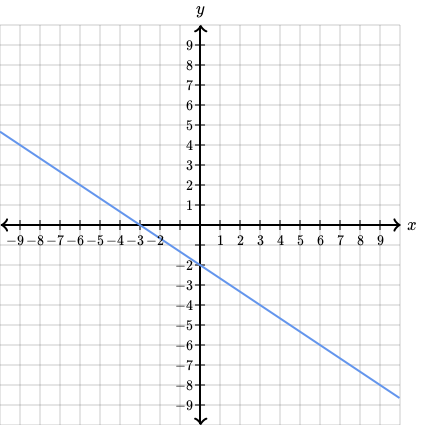
e poiché a è minore di 0, quando si moltiplica per il suo inverso, il segno della disuguaglianza cambia, ossia:



Ne consegue che la soluzione è l'intervallo **[-3,+∞].**



Pertanto, il segno di a è importante perché influenza il segno della disuguaglianza. È anche quello che ci dice se il grafico della funzione è crescente o decrescente. In questo caso è negativo, significa che la funzione è decrescente, e questo si spiega con il fatto che fino a un certo punto troveremo numeri positivi, e poi numeri negativi. Ecco perché la soluzione della disequazione parte da un punto (nel nostro caso -3) e prosegue verso +∞.



Questo si può vedere anche dal grafico della funzione, fino al punto -3 abbiamo numeri positivi e poi negativi. Pertanto, possiamo trovare la soluzione di una disequazione anche dal grafico della funzione.

Fonti

https://matematic.eu/LectiaDeMatematica/FunctiaDeGradul1.html

https://www.edumo.org/lectie/6401139935281152 - fctie de gr I

https://www.edumo.org/lectie/6086439091568640 - propr fct gr I

https://www.edumo.org/lectie/5551744788463616 - monotonie

https://www.edumo.org/lectie/5345009758896128 - semnul fctiei de gr I

https://www.edumo.org/lectie/5037387289722880 - inecuatii

https://ro.wikipedia.org/wiki/Func%C8%9Bie\_algebric%C4%83\_de\_gradul\_%C3%AEnt%C3%A2i

II FUNZIONE DI GRADO

**Definizione della funzione di secondo grado**

*f* :  *, f*(*x*)*=ax2 +bx+c, a0, a,b*,c .

**Rappresentazione grafica della funzione di II grado** Il grafico della funzione di II grado è una parabola, avente come vertice , dove

che si chiama anche discriminante della funzione di secondo grado, e il grafico ha l'asse di simmetria destro. 

# **Il minimo e il massimo della funzione di secondo grado. L'immagine della funzione di secondo grado.**

- La funzione di grado II ammette un minimo per (questo è anche il caso del grafico di esempio che segue) e il valore minimo è e si ottiene per .

Diagram

Description automatically generated

- La funzione di grado II ammette un massimo per (è anche il caso del grafico di esempio qui sotto) e il valore massimo è e si ottiene per .

Diagram

Description automatically generated

Per quanto riguarda l'immagine della funzione di secondo grado (quindi l'insieme dei suoi valori

*y=f*(*x*)*=ax2 +bx+c*) Si tratta di:

se , e rispettivamente se .

# **Monotonia functiei de gradul II**

* In questo caso , la funzione di gradul II ammette un minimo e si estende a chi è in grado di *descrivere* e *crescere* in .



* Nel frattempo , la funzione di gradul II ammette un massimo e *cresce* per si

*descrescatoare* pentru .

# **Forma canonica a funzione di gradul II**

Pentru functia de gradul II *se defineste forma sa canonica* ca fiindText

Description automatically generated care ne conduce si la valorile de minim si maxim de mai inainte ca si la obtinerea radacinilor ecuatiei de gradul II, atunci cand , dupa cum vom vedea mai departe.

# **Pozitia parabolei fata de axa Ox. Intersezione dei grafici con l'asse di coordinamento. Funzioni seminali di livello II**

* Intersectia cu axa OY este data de punctul de coordonate .
* Intersectia cu axa OX se obtine rezolvand ecuatia *f*(*x*) = 0. Daca , atunci ecuatia *f*(*x*) = 0 sono radacini reali:

,

quindi le radici dell'equazione di II grado *ax2* +bx+c=0*, a0, a,b*,c sono che sono anche le ascisse dei punti di intersezione con l'asse OX...

* Se allora il grafico interseca l'asse OX nei puntiA picture containing night sky

  Description automatically generated e , come si può vedere dai seguenti disegni.

Diagram

Description automatically generated Diagram

Description automatically generated

Per quanto riguarda il segno della funzione di II grado, anche in questo caso è suggerito dai grafici precedenti e ovviamente è dato dal segno di e dal segno di a. Si ha quindi:

Il grafico della funzione si trova sia sopra che sotto l'asse OX.

* Se il grafico interseca l'asse OX nel punto che è anche il picco della parabola.

Diagram

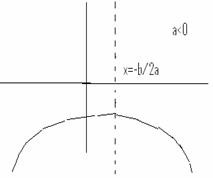
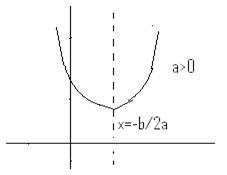
Description automatically generatedDiagram

Description automatically generated

Il segno della funzione di grado II, in questo caso, suggerito anche dai grafici precedenti, è dato dal segno di e dal segno di a è:

Il grafico della funzione si trova solo sopra o sotto l'asse OX, avendo solo il vertice della parabola sull'asse OX.

* Se il grafico non interseca l'asse OX e il vertice della parabola si trova sopra l'asse OX (caso ) o sotto di esso (caso ). si trova sopra l'asse OX (caso ) o sotto di esso (caso ).



Il segno della funzione di grado II, in questo caso, suggerito anche dai grafici precedenti, è dato dal segno di e dal segno di *a è*:

Il grafico della funzione si trova appena sopra o sotto l'asse OX.

Nota: il segno della funzione di secondo grado viene utilizzato per risolvere le disequazioni di secondo grado, per dedurre il segno di un prodotto o di una frazione contenente funzioni di secondo grado, ecc.

# **Le relazioni tra radici e coefficienti (relazioni di Viète). La forma lineare della funzione di secondo grado.**

Tenendo conto della forma canonica della funzione di secondo gradoText

Description automatically generated , si deduce la forma lineare . Identificando questa relazione con *f*(*x*)*=ax2 +bx+c*



da cui derivano le relazioni tra radici e coefficienti (formule di Viète):

Text

Description automatically generated

Osservazione.

-Le relazioni tra radici e coefficienti non risolvono l'equazione di secondo grado. Servono a risolvere vari esercizi in cui compaiono relazioni aggiuntive legate alle radici. Vale la pena di notare il modo in cui varie espressioni contenenti le radici vengono espresse e a seconda di queste realtà. Ad esempio:

 o

.

Se le due radici sono date e o la somma S e il loro prodotto P, si può formare l'equazione di secondo grado da cui provengono:

sau .

# ***Disuguaglianze della forma ax2 +bx+c* 0 (,,), studiate su o su intervalli di numeri reali**

La disequazione ***ax2 +bx+c* 0 (,,)** si risolve costruendo la tabella dei segni per ***f(x)= ax2 +bx+c***, da cui si sceglie l'intervallo (o gli intervalli) che soddisfa (soddisfano) la disequazione come soluzione della disequazione. Se la disequazione viene risolta su intervalli di numeri reali, la soluzione ottenuta prima si interseca con l'incontro di questi intervalli, ottenendo così la soluzione finale della disequazione.

# ***Sistemi di disequazioni di secondo grado, studiati su o su intervalli di numeri reali***

Text

Description automatically generated

Ogni disequazione viene risolta separatamente, ottenendo le soluzioni (per la prima disequazione), (per la seconda disequazione),, (per la disequazione *n*). Dove è la soluzione del sistema di disequazioni ottenuta (se risolta su ) come essere .



Se il sistema viene risolto su un incontro di intervalli, allora la soluzione è intersecata dall'incontro di intervalli.



# **Sistemi di equazioni di secondo grado**

* 1. **Sistemi di forma**

dove *a,b,c,d,m,n*,p

in quale equazione è di grado I e quale di grado II.

Dall'equazione di primo grado si sostituisce un'incognita all'altra, ad esempio e la si inserisce nell'equazione di secondo grado, ottenendo:

Text

Description automatically generated with medium confidence

che risolta dà due soluzioni.

Riportando questi valori nella relazione di sostituzione, si ottengono le coppie di soluzioni

A picture containing dark, night sky

Description automatically generated e



* 1. **Risoluzione di sistemi di forme**

, .

chiamati anche sistemi simmetrici.

Tenendo conto che le relazioni precedenti possono essere le relazioni tra le radici e i coefficienti di un'equazione di secondo grado, si costruisce quindi l'equazione , che risolta dà due soluzioni 

e da qui si ottengono le soluzioni del sistema:

No image

Description automatically generatedsiNo image

Description automatically generated with medium confidence .

Esempio. Risolvere il sistema nell'insieme dei numeri reali:



No image

Description automatically generated

* 1. **Sistemi omogenei**

Text

Description automatically generated, .

Per risolvere questi sistemi si procede nel modo seguente: moltiplicare la prima equazione per e la seconda equazione per ( ), quindi

Text

Description automatically generated



Sommando le due equazioni si ottiene la relazione che dividendo per

, va a completare l'equazione . Si noti che con si giunge a un'equazione di II grado, . Assumendo che le soluzioni di questa equazione siano 

poi possiamo formare i sistemi:

Graphical user interface

Description automatically generated with medium confidence si Graphical user interface

Description automatically generated with medium confidence

che sono ovviamente sistemi di tipo *a*).

# **Esercizi**

1. Il valore del parametro per il quale l'equazione ha una soluzione distinta nell'intervallo è:
2. a) ; b) ; c) ; d) ;e) .

*Soluzione: Poiché l'equazione* deve avere una soluzione distinta nell'intervallo , le condizioni devono essere soddisfatte contemporaneamente:

quindiText

Description automatically generated e dove



. Ne consegue che ,

quindi la risposta corretta è la *d*).

1. Il numero reale x è strettamente maggiore del suo quadrato se e solo se:

a) b) c) d) e) 

*Soluzione: . La disequazione* ha come soluzione . La risposta corretta è a).

1. Sia l'equazione , dove . Se il numero è complesso è la radice dell'equazione allora:

a) b) c) d) e) . 

Soluzione: Poiché i coefficienti m e n sono numeri reali e l'equazione ammette la radice complessa , allora l'equazione ammette la radice e la coniugata . Dalle relazioni di Viète si risultato e la risposta corretta è b)

1. Per la famiglia di funzioni di secondo grado i vertici delle parabole associate si trovano sul lato destro dell'equazioneecuatie:

**a)** ; **b)** ; **c)** ; **d) ; e)** .

Soluzione: L'ascissa del vertice V della parabola è e l'ordinata è

. Il risultato è: che è l'equazione della seconda bisettrice del sistema di assi XOY). Quindi **c)**

L'insieme di tutti i valori del parametro reale m per cui

, è:

**a)** (la folla si svuota) ; **b) ; c) d)** ; **e)** .

*Soluzioni*: Le condizioni sono: si . Risultati . Quindi **b)**.

1. L'insieme di tutti i valori dei parametri per i quali la radice della quazione è per è:



**a) ; b) ; c)** (folla vuota) ; **d) ; e)** .

*Soluzione*: . Dalla condizione data e da

Risultato . Quindi **c)**.

1. Sia la disuguaglianza . Tra i seguenti intervalli, l'insieme di tutte le soluzioni di questa disuguaglianza è:

a) ; b) ;c) ;d) ;e) .

*Soluzione*: Dalle condizioni di esistenza . per la disuguaglianza è ovviamente soddisfatta. Per la elevando al quadrato la disuguaglianza data si ottiene



quindi la soluzione . La soluzione sarà

1. Essere funzione ,. Valori effettivi dei parametri per i quali 

Sono:

a) ; b) ;c) ;d) ;e) .

*Soluzione*: Sappiamo che se e solo se l'equazione ha soluzione in , se l'equazione ha soluzione reale



sol. in , so significa



per . La condizione che e sia soluzione di



La somma delle soluzioni integrali della disequazione è:

a) b) c) d) e) 

*Soluzione*: , quindi , quindi 

Risposta corretta **c**).

1. Sia la funzione L'insieme dei valori dei parametri 

per cui il grafico della funzione f interseca l'asse x in due punti distinti è:

a) b) c)



e)

*Soluzione*: Per l'equazione data , imporre , da dove proviene 

Risposta corretta **a**).

1. I valori reali del parametro m, per i quali sono:

a) b) c) d) e) 



la frazione per essere positiva, deve essere , ciò che implica





1. Funzione I valori del parametro per cui la parabola associata alla funzione f è tangente al Bue sono:

a) b) c) d) e) 

*Soluzione*: L'equazione deve avere una sola soluzione, quindi per imporre . Il risultato è , quindi

Risposta corretta **c**).

1. La disuguaglianza ha una soluzione:

a) b) c) d) e) 

*Soluzione*: La disuguaglianza è equivalente aText

Description automatically generated .

La soluzione è Risposta corretta **e**).

1. L'immagine della funzione è:

a) c) d) 

e)

*Soluzione*: Si verifica che poiché la funzione f è continua, quindi ha

La proprietà di Darboux, si è rivelata Risposta corretta **b**).

Il valore del prodotto 

a) b) c) d) e)

*Soluzione*: L'equazione ha radici si , quindi



, che comporta , e il valore del prodotto Risposta corretta **d**).