

Unghiul dintre vectorii din plan

Cuprins

[**Introducere**](#_heading=h.gjdgxs)  **3**

[Unghiul dintre doi vectori folosind produsul punctual](#_heading=h.int86pskt9cv)  **5**

[Unghiul dintre doi vectori folosind produsul încrucișat](#_heading=h.k6vk1iy0lax6)  **6**

[**Probleme rezolvate**](#_heading=h.xs1kohmnrd88)  **9**

[Exemplul 1](#_heading=h.1fob9te)  9

[Exemplul 2](#_heading=h.190brkc6j781)  10

[Exemplul 3](#_heading=h.erdhqpgx4jq6)  12

[**Exercițiul de evaluare națională**](#_heading=h.drhckcekq2u6)  **13**

# Introducere

Vectorii au o importanță semnificativă în geometria și fizica vectorilor. În special, direcția vectorilor și unghiurile la care sunt orientați sunt critice în determinarea efectului pe care îl va avea combinația acestor vectori.

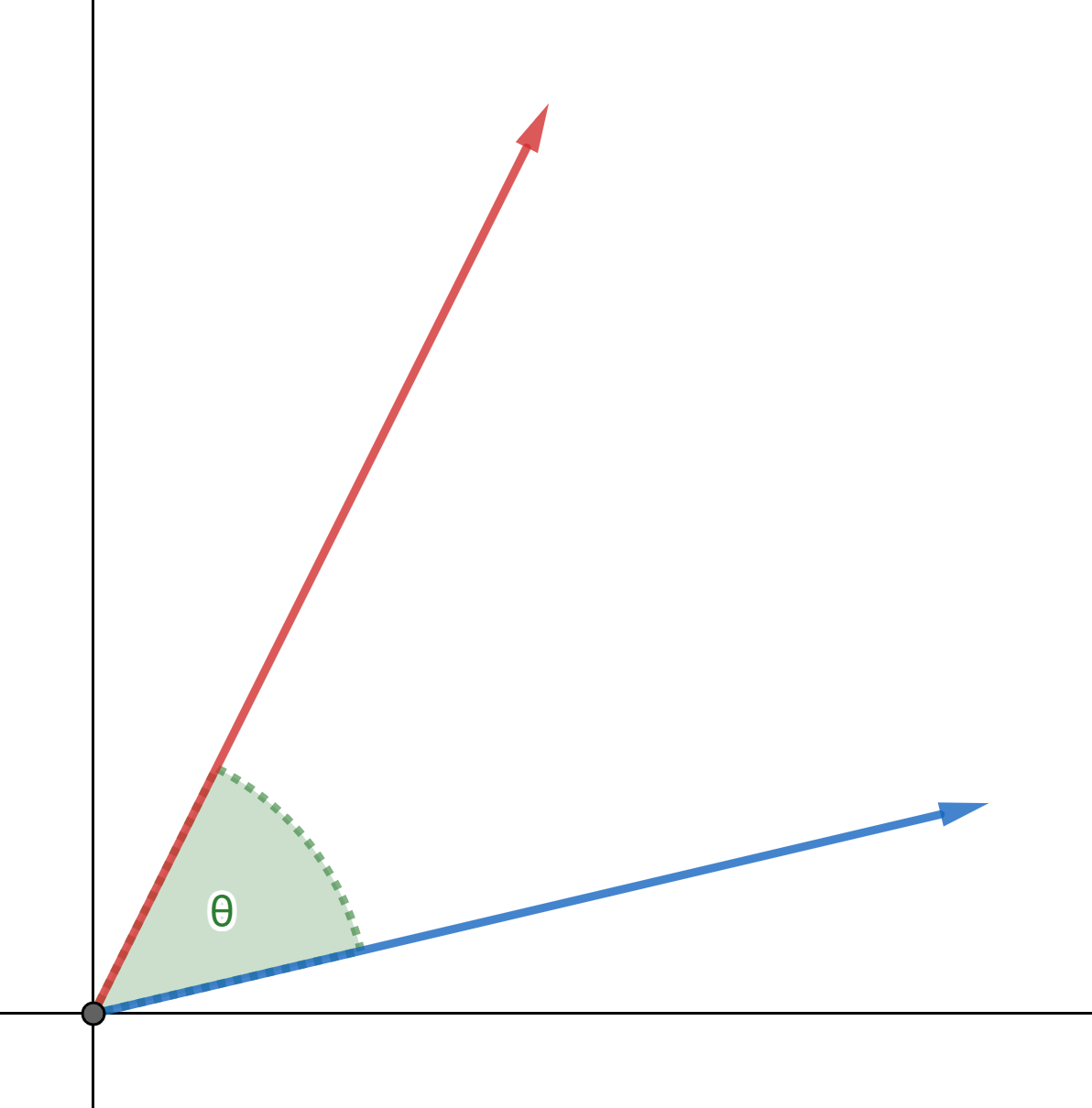
De exemplu, dacă studiem mișcarea unei mingi de fotbal în timpul unui joc, poziția acesteia față de centrul terenului poate fi descrisă printr-un vector de poziție, iar mișcarea printr-un vector viteză a cărui lungime indică viteza mingii, deci va fi cu atât mai mult cu cât mingea merge mai repede. Direcția vectorului viteză explică direcția mișcării mingii.

Uneori avem de-a face cu doi vectori care acționează asupra aceluiași obiect, deci unghiul vectorilor este critic. În lumea reală, orice sistem este supus mai multor vectori combinați împreună.

Dacă există doi vectori într-un plan astfel încât cozile ambilor vectori să fie unite, atunci putem defini unghiul dintre ei ca:

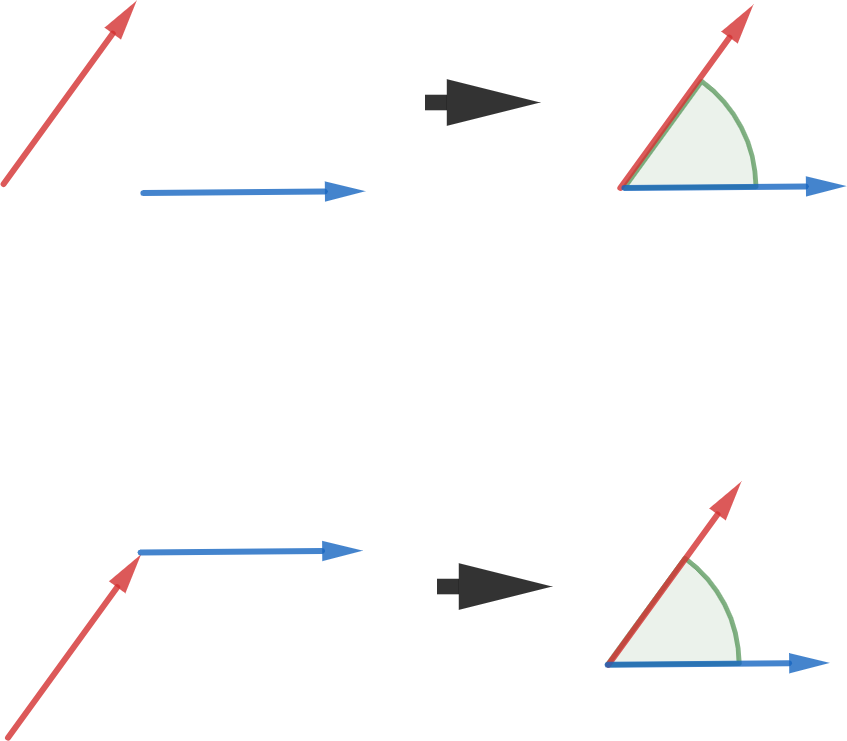
*„Unghiul dintre doi vectori este cel mai scurt unghi la care oricare dintre cei doi vectori este rotit în jurul celuilalt vector, astfel încât ambii vectori să aibă aceeași direcție”.*

Discuția despre unghiurile vectoriale se concentrează pe găsirea celui mai scurt unghi între vectori. Aceasta se va concentra pe unghiul dintre doi vectori în poziție standard.   
  
*„Se spune că un vector este în poziție standard dacă punctul său inițial este originea (0, 0).”*

**

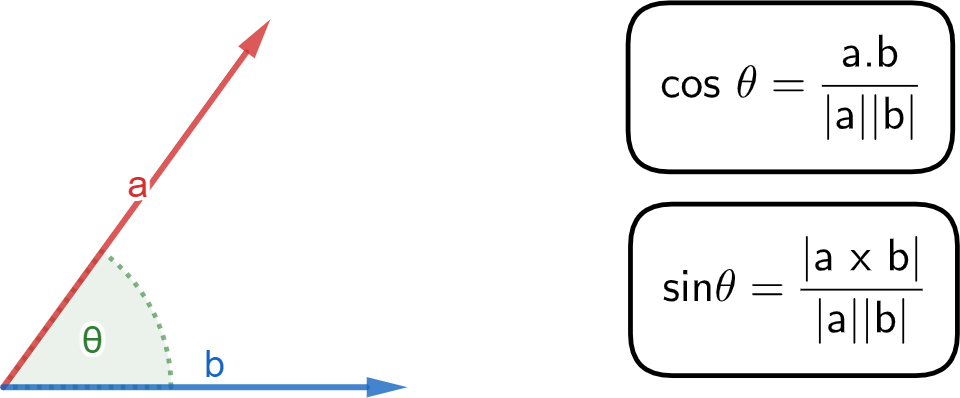
Cu alte cuvinte, unghiul dintre doi vectori este unghiul dintre cozile lor. Rețineți că unghiul dintre doi vectori este întotdeauna între 0° și 180°.

Dacă vectorii nu sunt legați coadă cu coadă, atunci trebuie să îi unim prin deplasarea unuia dintre vectori.



Prin multiplicarea vectorilor este posibil să găsim unghiul dintre doi vectori. Pentru a rezolva înmulțirea vectorială pot fi utilizate două metode diferite: produsul scalar și produsul încrucișat.

Prin produsul scalar a doi vectori se obține o mărime scalară. Pe de altă parte, după cum sugerează și numele, produsul vectorial (sau produsul încrucișat) dintre doi vectori produce o cantitate vectorială.



# Unghiul dintre doi vectori folosind produsul punct

Se consideră doi vectori a și b separați printr-un unghi θ. Formula produsului punctual este:

unde **ab** este produsul scalar a doi vectori. |a| și |b| sunt mărimea vectorilor **a** și **b,** iar θ este unghiul dintre ei.   
Formula anterioară afirmă că produsul scalar al doi vectori a și b este egal cu produsul mărimilor lor înmulțit cu cosinusul unghiului.   
Deci pornim de la definiția produsului punctual pentru a găsi valoarea unghiului.   
Să începem prin a izola cosinusul:

În cele din urmă, pentru a găsi unghiul dintre doi vectori, a și b, vom rezolva unghiul θ,

Să ne concentrăm pe produsul scalar, în acest scop luăm în considerare doi vectori **a** și **b**

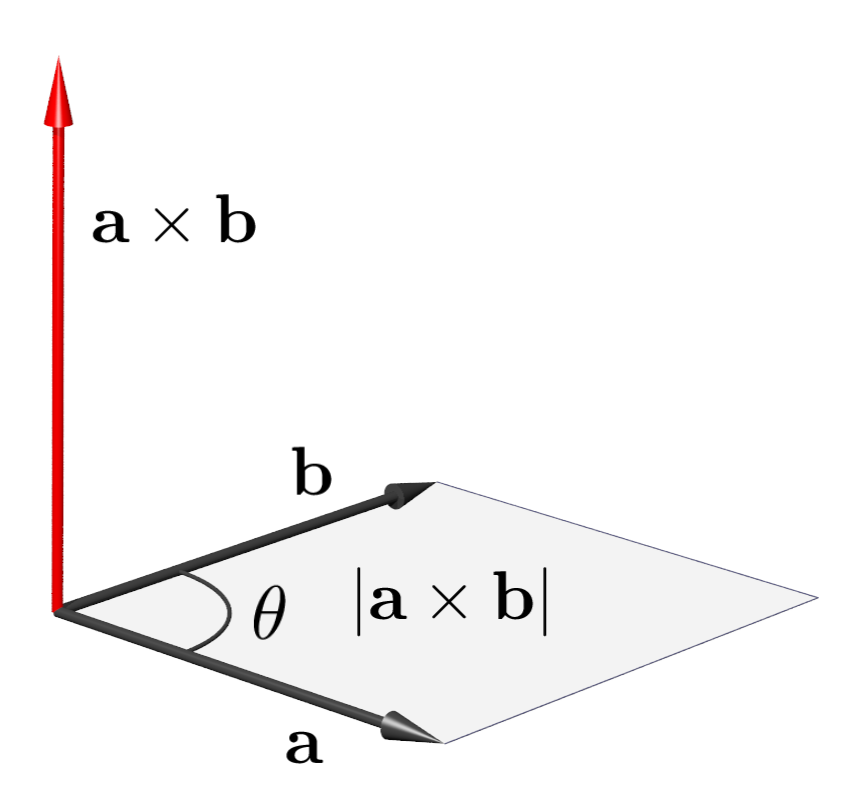
Apoi produsul scalar dintre doi vectori **a** și **b** este dat astfel:

**. = +**

# Unghiul dintre doi vectori folosind produsul încrucișat

O altă metodă de a găsi unghiul dintre doi vectori este produsul încrucișat.   
Produsul încrucișat este definit ca:

*„Vectorul care este perpendicular atât pe vectori, cât și pe direcție este dat de regula mâinii drepte. „*

**

Formula produsului încrucișat este:

Unde **θ** este unghiul dintre doi vectori, |a| și |b| sunt mărimile a doi vectori **a** și **b,** iar **n** este vectorul unitar perpendicular pe planul care conține **a** și **b** . Direcția sa este dată de regula mâinii drepte.

Pentru a rezolva acest lucru pentru θ, să luăm mărimea ambilor membri:

Dar, deoarece n este un vector unitar, mărimea lui este 1. Deci obținem:

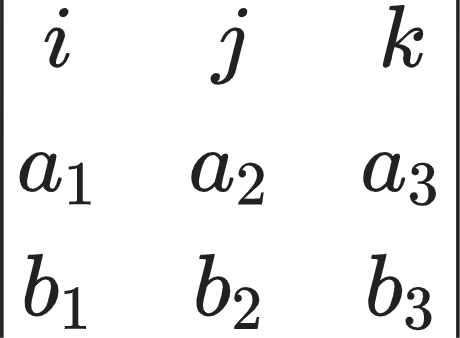
Să izolăm sin θ pentru a găsi unghiul dintre acești vectori

În final putem obține unghiul ca:

Să ne concentrăm asupra produsului încrucișat. Deoarece vom folosi produsul încrucișat, trebuie să luăm în considerare și a treia dimensiune, deoarece produsul încrucișat va fi un vector perpendicular pe planul care conține a și b (deci nu va rămâne în același plan).

Deci, în general, putem lua ca exemplu doi vectori tridimensionali a și b: cum ar fi

Produsul încrucișat poate fi exprimat ca determinant al matricei



unde este o bază ortonormală orientată pozitiv.

Calculând determinantul obținem

deci obținem următorul vector

În studiul nostru de caz, deoarece luăm în considerare unghiul dintre vectori în planul xy, putem simplifica notația a **și** b setânda treia lor componentă la 0, acest lucru îi va face vectori bidimensionali. Rețineți că, ca rezultat al produselor încrucișate, vom obține totuși un vector perpendicular, care va fi perpendicular pe

planul xy care conține **a** și **b** .

Dacă recalculăm formulele anterioare considerând **a** și **b** ca aparținând planului xy (deci cu ), obținem:

# Probleme Rezolvate

## Exemplul 1

*Misiune:*

Găsiți unghiul dintre vectorii **a** = <1, 2> și **b** = <-2, -1> folosind **produsul scalar** .

*Soluţie:*

Fie θ unghiul dintre vectorii a și b.

Să găsim unghiul θ dintre vectori folosind produsul scalar.

Pentru a folosi formula trebuie să calculăm produsul scalar și mărimile ambilor vectori.

Acum putem calcula unghiul ca:

**143,13°**

## Exemplul 2

*Misiune:*

Găsiți unghiul dintre vectorii **a** = <1, 2> și **b** = <-2, -1> folosind **produsul încrucișat** .

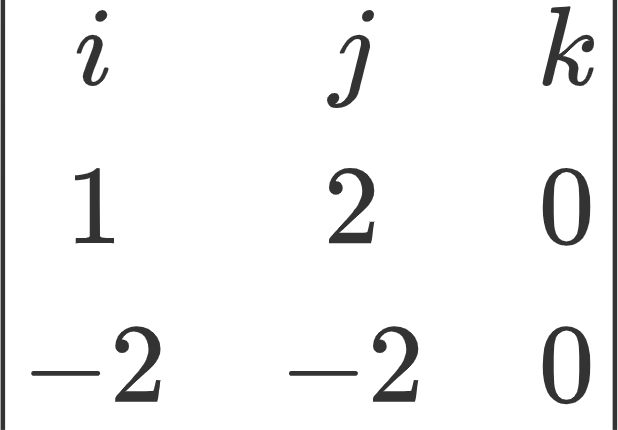
*Soluţie:*

Fie θ unghiul dintre a și b. Să găsim unghiul θ dintre vectori folosind produsul încrucișat.

Deoarece vom folosi produsul încrucișat, trebuie să luăm în considerare a treia dimensiune, așa că trebuie să ne extindem vectorii la a treia dimensiune.

Actualizați notația noastră pentru a și b:

Să calculăm produsul încrucișat al lui **a** și **b** .



Acum îi găsim amploarea.

Acum dorim să folosim formula pentru a obține valoarea unghiului

Apoi primim

Obtinem θ ≈ **36,87 (sau) 143,13°** (= 180 - 36,87) (deoarece [sinusul](https://www.cuemath.com/trigonometry/sine-function/) este pozitiv și în al doilea cadran).

## Exemplul 3

*Misiune:*

Găsiți unghiul dintre vectorii **a** = <0, 5> și **b** = <2, 0> folosind **produsul scalar** .

*Soluţie:*

Fie θ unghiul dintre vectorii a și b.

Să găsim unghiul θ dintre vectori folosind produsul scalar.

Pentru a folosi formula trebuie să calculăm produsul scalar și mărimile ambilor vectori.

Acum putem calcula unghiul ca:

**90°**

*Note* :

Există puține considerații care pot fi luate pentru a accelera atingerea acestei soluții.   
În primul rând, calculul și poate fi simplificat deoarece sunt vectori unidimensionali (una dintre componentele lor este 0), deci modul lor este egal cu componenta lor nu este zero.

În plus, calculul lui și , chiar dacă este simplu, nu este deloc necesar. Deoarece am descoperit că este egal cu 0 și acesta va fi numărătorul argumentului arccos, nu este necesar să evaluăm și numitorul.

Dar, mergând mai departe, acest exercițiu ar putea fi rezolvat fără calcule, ci doar cu considerente geometrice. Deoarece **a** este un vector vertical (componenta sa x este 0) și **b** este un vector orizontal (componenta sa y este 0), putem deduce că sunt vectori ortogonali, aceasta înseamnă că unghiul dintre ei este de 90°.

# 

# Exercițiu național de evaluare

(Examenul de maturitate - Italia:

<https://drive.google.com/file/d/16bxAx7d0ts5zgr3P62qzGu0ZPoZ2aywl/view?usp=sharing>)

PROBLEMA 1

Se consideră triunghiuri a căror bază este AB = 1 și al căror vârf C variază astfel încât unghiul C Aˆ B să fie dublu unghiul A Bˆ C .

1. Trimiteți planul la un sistem de coordonate convenabil, determinați ecuația locului γ locului geometric descris de C.

2. Reprezentați γ, ținând cont, desigur, de condițiile geometrice prescrise.

3. Determinați amplitudinea unghiului A Bˆ C care face suma pătratelor înălțimilor relativ la laturile AC și BC și, cu ajutorul unui calculator, dați o valoare a acestuia aproximată în grade și prime (sexagezimale) .

4. Demonstrați că A Bˆ C = 36° atunci AC=