**Logo, company name

Description automatically generated**

**Interpretarea geometrică a derivatei şi**

**funcţiile derivate**

**Clasă: F2-K11/K12**

**Cuprins**

[INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A DERIVATEI 2](#_Toc125492788)

[FUNCŢII DERIVABILE 10](#_Toc125492789)

[Problema tangentei la o curbă 11](#_Toc125492790)

[Derivabilitate şi continuitate 13](#_Toc125492791)

[Derivate laterale 14](#_Toc125492792)

[Derivata la stânga 14](#_Toc125492793)

[Derivata la dreapta 15](#_Toc125492794)

[Definiţia derivatei unei funcţii într-un punct 15](#_Toc125492795)

[Observatii 16](#_Toc125492796)

[Tabel cu derivatele funcţiilor elementare 17](#_Toc125492797)

[Operaţii cu funcţii derivabile 18](#_Toc125492798)

[Concluzii 19](#_Toc125492799)

[Surse 20](#_Toc125492800)

[Fişă de lucru 21](#_Toc125492801)

# ****INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A DERIVATEI****

**Diagram, schematic

Description automatically generated**

1)Dacă f’(x0)=∞, atunci graficul admite o semitangentă verticală

sub punctul M.

2)Dacă f’(x0)=-∞, atunci graficul admite o semitangentă verticală deasupra punctul M.

**Diagram, schematic

Description automatically generated**

3) Dacă fd’(x0)=∞, atunci graficul admite o semitangentă verticală deasupra punctul M.

**Diagram

Description automatically generated**

4)Dacă fd’(x0)=∞, atunci graficul admite o semitangentă verticală sub punctul M.

**Diagram

Description automatically generated**

5) Dacă derivatele laterale sunt egale fd’(x0)=fs’(x0), atunci cele două tangente sunt în prelungire. În acest caz M este punct de inflexiune(tangenta traversează graficul funcției).

**A picture containing text, music

Description automatically generated**

**A picture containing text, linedrawing

Description automatically generated**

**Definiție. Se spune că x0 este *punct de inflexiune al funcției f,* dacă** funcția este continuă în x0, are derivată în x0,(finită sau infinită)

și dacă Graficul este conex(concav) de o parte a lui x0 și concav (convex) de cealaltă parte.

6) Dacă derivatele laterale sunt diferite și fd’(x0)=+∞,fs’(x0)=- ∞, sau fd’(x0)=-∞,fs’(x0)=+∞, atunci cele două semitangente se suprapun și M este punct de întoarcere.

**Chart

Description automatically generated with low confidence**

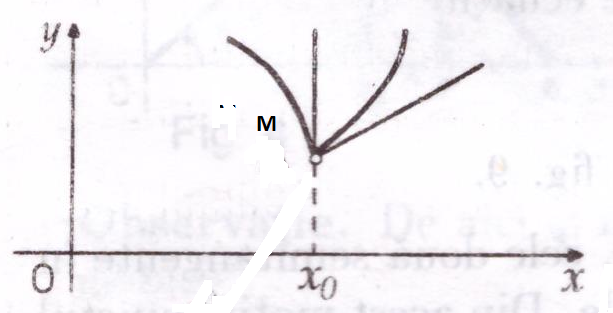
**A picture containing diagram

Description automatically generated**

7) Dacă derivatele laterale sunt diferite și cel puțin una este finită, atunci M este punct unghiular.

**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

****

**Cazul 1) fs’(x0)=-∞, fd’(x0)ϵR**

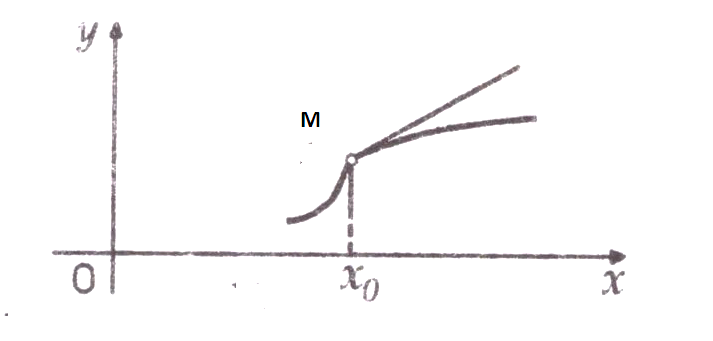
**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

**Cazul 2) fs’(x0)=+∞, fd’(x0)ϵR**

**Diagram

Description automatically generated**

****

**Diagram

Description automatically generated with medium confidenceA picture containing diagram

Description automatically generated**

**Cazul 3) fd’(x0)=+∞, fs’(x0)ϵR**

**Cazul 4) fd’(x0)=-∞, fs’(x0)ϵR**

**A picture containing text

Description automatically generated**

**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

**Cazul 5) fd’(x0), fs’(x0)ϵR și fd’(x0)≠fs’(x0)**

**A picture containing diagram

Description automatically generated**

# ****FUNCŢII DERIVABILE****

**Noţiunea de derivată a fost introdusă şi folosită în matematică de savantul Isaac Newton (1642 – 1724) în legătură cu studiul mecanicii.**

**Problema vitezei instantanee a unui mobil**

**viteza medie a mobilului în intervalul de timp [t0, t] este**

****

**viteza instantanee a mobilului în momentul t0 (fixat), t0 > 0 este:**

****

**acceleraţia mobilului la momentul t0 fixat este:**

****

**Aproape în acelaşi timp şi savantul Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) a introdus noţiunea de derivată în legătură cu studiul tangentei la o curbă într-un punct al acesteia.**

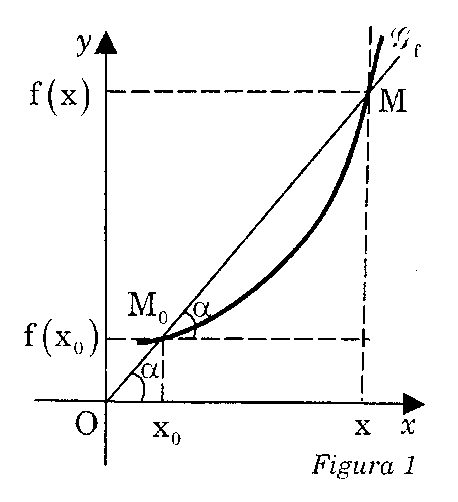
# ****Problema tangentei la o curbă****

**Fie f:(a,b)🡪R, o funcţie continuă şi M0(x0;f(x0)) pe graficul, Gf al lui f.**

**Panta secantei M0M reprezintă tangenta trigonometrică a unghiului format de aceasta cu sensul pozitiv al axei Ox.**

****

**Panta sau coeficientul unghiular al tangentei în punctul M0 la curba Gf este:**

****

**Tangenta în punctul M0(x0,f(x0)) este dată de ecuaţia:**

****

****

**Relaţia (1) se notează:**

**şi se numeşte derivata funcţiei f în punctul x0.**

**Fie funcţia f:D🡪R, D🡪R, x0 Є D un punct de acumulare mulţimii D.**

**Se spune că funcţia f are derivată în punctul x0 Є D dacă există limita:**

****

**Această limită se numeşte derivata funcţiei f în punctul x0, şi se notează:**

****

**Se spune că funcţia f este derivabilă în punctul x0 Є D dacă limita de mai jos există şi este finită:**

****

# ****Derivabilitate şi continuitate****

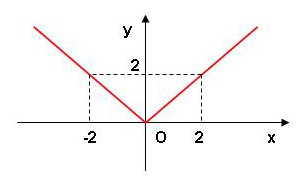
**Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.**

**Observaţii:**

**O funcţie numerică poate fi continuă într-un punct fără a fi şi derivabilă în acel punct.**

**Exemplu:**

**Funcţia modul f : R🡪R, f(x) =|x| este continuă în x0 = 0 şi nu este derivabilă în punctul x0 = 0.**

****

**Orice funcţie discontinuă într-un punct nu este derivabilă în acest punct.**

**Există funcţii discontinue într-un punct şi care au derivată în acel punct.**

**Exemplu:**

**Funcţia f : R🡪R, dată mai jos, este discontinuă în x0 = 0 iar f’(0) = + ∞.**

****

# ****Derivate laterale****

**Fie funcţia f:D🡪R şi x0 Є D.**

# ****Derivata la stânga****

****

# ****Derivata la dreapta****

****

**Funcţia f are derivată şi este derivabilă în x0 dacă şi numai dacă are derivate laterale şi este, respectiv, derivabilă la stânga şi la dreapta în x0 şi:**

****

# ****Definiţia derivatei unei funcţii într-un punct****

**Fie f:ER unde E este un interval sau o reuniune de intervale din R**

**Se spune că funcţia f are derivată în dacă limita  există în **

**În acest caz această limită se notează cu  şi se numeşte derivata funcţiei f în **

**Deci **

**Se spune că funcţia f este derivată în dacă limita  există în R**

**(există şi este finită)**

**În acest caz această limită se notează cu , adică **

**Se spune că funcţia f este derivată pe un interval I dacă este derivabilă în fiecare punct al intervalului I.**

# ****Observatii****

**Funcţia f are derivată în x0 f are derivate laterale în x0 şi **

**(  există în  ;  există în  )**

# ****Tabel cu derivatele funcţiilor elementare****

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **FUNCŢIA** | **DERIVATA** | **DOMENIUL DE**  **DERIVABILITATE** | **FUNCŢIA**  **COMPUSĂ** | **DERIVATA** |
| **c( constantă)** | **0** |  |  |  |
| **x** | **1** |  | **u** |  |
| **x** |  |  |  |  |
| **x**  **( )** |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| **ln x** |  |  | **ln u** |  |
|  |  |  |  |  |
| **sin x** | **cos x** |  | **sin u** | **cos u** |
| **cos x** | **- sin x** |  | **cos u** | **- sin u** |
| **tg x** |  | **cos x** | **tg u (cos u)** |  |
| **ctg x** | **-** | **sin x** | **ctg u (sin u)** |  |
| **arcsin x** |  | **(-1;1)** | **arcsin u** |  |
| **arccos x** | **-** | **(-1;1)** | **arccos u** |  |
| **arctg x** |  |  | **arctg u** |  |
| **arcctg x** | **-** |  | **arcctg u** |  |

# ****Operaţii cu funcţii derivabile****

****

****

****

****

** ( c = constantă)**

****

****

****

# ****Concluzii****

**Studiul funcţiilor în general, al funcţiilor continue, derivabile în special, necesită dezvoltarea unor competenţe generale şi specifice reflectate în:**

**Identificarea grafic/vizual, a proprietăţilor unei funcţii numerice, privind: mărginirea, continuitatea, tendinţa asimptotică, derivabilitatea;**

**Asocierea de date, extrase dintr-o situaţie problemă, cu proprietăţi ale funcţiilor numerice studiate, de tipul: teoreme de convergenţă, operaţii cu limite, limite tip, tabele de derivare;**

**Aplicarea unor algoritmi specifici, calculului diferenţial, în rezolvarea unor probleme şi modelarea unor procese specifice, unor domenii de activitate;**

**Exprimarea în limbajul analizei matematice, a unor teoreme concrete, modelabile prin funcţii numerice;**

**Interpretarea pe baza lecturii grafice, a proprietăţilor unor funcţii, care reprezintă exemple din domeniul economic, social, ştiinţific;**

**Verificarea experimental a rezultatelor, deduse prin calcul, pentru probleme practice exprimabile matematic;**

**Determinarea unor optimuri situaţionale, prin aplicarea calculului diferenţial, în probleme practice sau specifice unor domenii de activitate.**

**Aplicaţii utile ale derivatei unei funcţii**

**determinarea intervalelor de monotonie pentru o funcţie dată (funcţia este crescătoare sau descrescătoare) – acest lucru se face studiind semnul derivatei întâi a funcţiei;**

**determinarea punctelor de extrem pentru o clasă extinsă de funcţii numerice – acest lucru se face studiind semnul derivatei întâi a funcţiei;**

**rezultatele teoretice asupra monotoniei şi punctelor de extrem ale unei funcţii permit obţinerea unor inegalităţi care, cu ajutorul metodelor elementare ar fi greu de demonstrat;**

**determinarea intervalelor de convexitate sau concavitate ale unei funcţii – acest lucru se face studiind semnul derivatei a doua a funcţiei;**

**cu ajutorul derivabilităţii se poate stabilii ordinul de multiplicitate ale rădăcinilor unei ecuaţii polinomiale sau a intervalelor în care se găsesc rădăcinile unei ecuaţii asociate unei funcţii polinomiale.**

# ****Surse****

**Gheorghe Cârjă, Ovidiu Cârjă – Analiză matematică, Culegere de probleme rezolvate şi comentate, Editura GIL, Zalău, 2003;**

**Lia Aramă, Toader Morozan – Culegere de probleme de analiză matematică, Editura Universal Pan, Bucureşti, 1997;**

**Marius Burtea, Georgeta Burtea – Matematică, manual pentru clasa a XI-a, Editura Carminis, Piteşti, 2006;**

**Mircea Ganga – Probleme rezolvate din manualele de matematică pentru clasa a XI-a, Editura MATHPRESS, Ploieşti, 2006.**

# Fişă de lucru

1. Fie f : R → R, f(x)=-3+5
2. Calculati
3. Calculati f’(x)
4. Calculati f’(-1) + f’’(-1)
5. Scrieti ecuatia tangentei la graficul functiei f cu punctul de abscisa
6. Calculati
7. Calculati
8. Determinati intervalele de monotonie si punctele de extrem ale functiei f.
9. Determinati punctul de inflexiune al