**Logo, company name

Description automatically generated**

**Geometrická interpretácia derivácie a odvodených funkcií**

**Trieda školy: K12**

**Obsah**

[GEOMETRICKÁ INTERPRETÁCIA DERIVÁCIE 3](#_Toc125619669)

[DERIVAČNÉ FUNKCIE 10](#_Toc125619670)

[Problém dotyčnice ku krivke 11](#_Toc125619671)

[Odvoditeľnosť a kontinuita 13](#_Toc125619672)

[Bočné deriváty 14](#_Toc125619673)

[Odvodené doľava 14](#_Toc125619674)

[Odvodené vpravo 15](#_Toc125619675)

[Definícia derivácie funkcie v bode 15](#_Toc125619676)

[Poznámky 16](#_Toc125619677)

[Tabuľka s deriváciami elementárnych funkcií 17](#_Toc125619678)

[Operácie s derivovateľnými funkciami 18](#_Toc125619679)

[Závery 19](#_Toc125619680)

[Zdroje 20](#_Toc125619681)

[Pracovný hárok 21](#_Toc125619682)

# ****GEOMETRICKÁ INTERPRETÁCIA DERIVÁCIE****

**Diagram, schematic

Description automatically generated**

1. Ak f'(x0 )=∞, potom graf má vertikálnu polpriamku

V bode M.

2) Ak f'(x0 )=-∞, potom graf má vertikálnu polpriamku nad bodom M.

**Diagram, schematic

Description automatically generated**

3) Ak fd '(x0 )=∞, potom graf pripúšťa vertikálnu polpriamku nad bodom M.

**Diagram

Description automatically generated**

4) Ak fd '(x0 )=∞, potom graf pripúšťa vertikálnu polpriamku pod bodom M.

**Diagram

Description automatically generated**

5) Ak sa bočné derivácie rovnajú fd '(x0 )=fs'(x0 ), potom sú obe dotyčnice v predĺžení. V tomto prípade je M inflexný bod (dotyčnica pretína graf funkcie).

**A picture containing text, music

Description automatically generated**

**A picture containing text, linedrawing

Description automatically generated**

Definícia. Hovorí sa, že x0 je inflexný bod funkcie f, ak je funkcia spojitá v x0, má deriváciu v x0, (konečnú alebo nekonečnú)

a ak je graf konexný (konkávny) na jednej strane x0 a konkávny (vypuklý) na druhej strane.

6) Ak sú bočné derivácie rôzne a fd '(x0 )=+∞,fs'(x0 )=- ∞, sau fd '(x0 )=-∞,fs'(x0 )=+∞, potom sa tieto dve polpriamky prekrývajú a M je bod zvratu.

**Chart

Description automatically generated with low confidence**

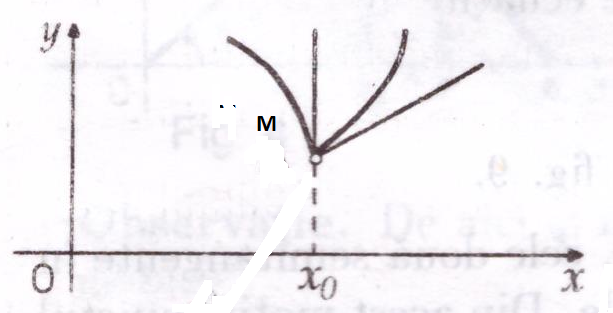
**A picture containing diagram

Description automatically generated**

7) Ak sú bočné derivácie rôzne a aspoň jedna je konečná, potom je M uhlový bod.

**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

****

**Prípad 1) fs '(x0 )=-∞, fd '(x0 )ϵR**

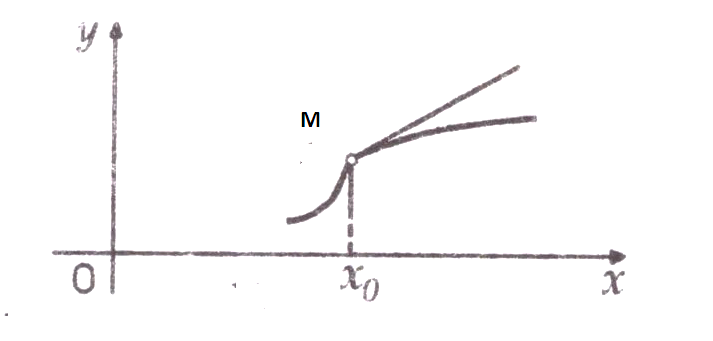
**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

**Prípad 2) fs '(x0 )=+∞, fd'(x0 )ϵR**

**Diagram

Description automatically generated**

****

**Diagram

Description automatically generated with medium confidenceA picture containing diagram

Description automatically generated**

**Prípad 3) fd '(x0 )=+∞, fs '(x0 )ϵR**

**Prípad 4) fd '(x0 )=-∞, fs '(x0 )ϵR**

**A picture containing text

Description automatically generated**

**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

**Prípad 5) fd '(x0 ), fs '(x0 )ϵR și fd '(x0 )≠fs '(x0 )**

**A picture containing diagram

Description automatically generated**

# ****DERIVAČNÉ FUNKCIE****

**Pojem derivácie zaviedol a používal v matematike vedec Isaac Newton (1642 - 1724) v súvislosti so štúdiom mechaniky.**

**Problém okamžitej rýchlosti mobilného**

**priemerná rýchlosť mobilného zariadenia v časovom intervale [t0, t] je**

****

**okamžitá rýchlosť mobilného zariadenia v čase t0 (pevná), t0 > 0 je:**

****

**zrýchlenie pohyblivého telesa v pevnom okamihu t0 je::**

****

**Takmer v rovnakom čase zaviedol vedec Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) pojem derivácie v súvislosti so štúdiom dotyčnice ku krivke v jej bode.**

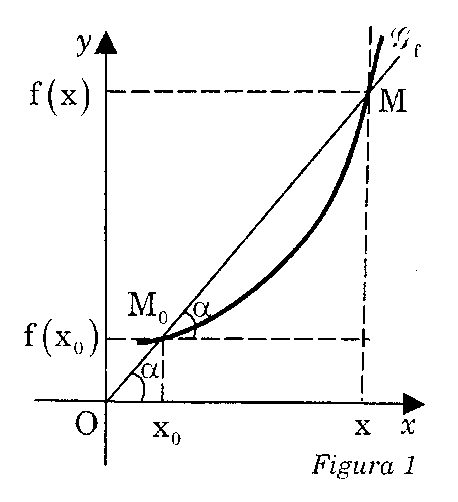
# ****Problém dotyčnice ku krivke****

**Ak je f:(a,b)🡪 R, spojitá funkcia a M0(x0;f(x0)) na grafe, Gf na f.**

**Sklon sekanty M0M predstavuje trigonometrický tangens uhla, ktorý zviera s kladným smerom osi Ox.**

****

**Sklon alebo uhlový koeficient dotyčnice v bode M0 ku krivke Gf je:**

****

**Dotyčnica v bode M0(x0,f(x0)) je daná rovnicou:**

****

****

**Vzťah (1) sa zapisuje takto::**

**a nazýva sa deriváciou funkcie f v bode x0.**

**Nech je funkcia f:D🡪 R, D🡪 R, x0 Є D akumulačným bodom davu D.**

**O funkcii f sa hovorí, že má deriváciu v bode x0 Є D, ak limita existuje:**

****

**Táto limita sa nazýva derivácia funkcie f v bode x0 a píše sa:**

****

**Hovorí, že funkcia f je diferencovateľná v bode x0 Є D, ak limita pod ňou existuje a je konečná:**

****

# ****Odvoditeľnosť a kontinuita****

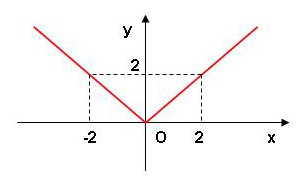
**Každá funkcia diferencovateľná v bode je v tomto bode spojitá.**

**Poznámky:**

**Číselná funkcia môže byť v určitom bode spojitá bez toho, aby bola v tomto bode diferencovateľná.**

**Príklad:**

**Funkcia režimu f : R🡪 R, f(x) =|x| je spojitá v bode x0 = 0 a nie je diferencovateľná v bode x0 = 0.**

****

**Každá nespojitá funkcia v bode nie je v tomto bode diferencovateľná.**

**Existujú funkcie, ktoré sú v určitom bode nespojité a ktoré majú v tomto bode deriváciu.**

**Príklad:**

**Funkcia f : R🡪 R, uvedená nižšie, je nespojitá v x0 = 0 a f'(0) = + ∞.**

****

# ****Bočné deriváty****

**Nech je funkcia f:D🡪 R a x0 Є D.**

# ****Odvodené doľava****

****

# ****Odvodené vpravo****

****

**Funkcia f má deriváciu a je diferencovateľná v x0 vtedy a len vtedy, ak má bočné derivácie a je ľavotočivo, resp. pravotočivo diferencovateľná v x0 a::**

****

# ****Definícia derivácie funkcie v bode****

**Či f:E R, kde E je interval alebo spojenie intervalov z R**

**Hovorí sa, že funkcia f má deriváciu v , ak limita existuje v **

**V tomto prípade sa táto limita označuje a nazýva sa derivácia funkcie f v **

**Takže **

**O funkcii f sa hovorí, že je odvodená v , ak limita existuje v R**

**(existuje a je konečný)**

**V tomto prípade sa táto hranica označuje , a to **

**O funkcii f sa hovorí, že je diferencovateľná na intervale I, ak je diferencovateľná v každom bode intervalu I.**

# ****Poznámky****

**Funkcia f má deriváciu v x0 f sú derivované laterálne v x0 a **

**( existuje v ; existuje v )**

# ****Tabuľka s deriváciami elementárnych funkcií****

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **FUNKCIA** | **DERIVATÍVNE** | **OBLASŤ DIFERENCOVATEĽNOSTI** | **ZLOŽENÁ FUNKCIA** | **DERIVATÍVNE** |
| **c (konštanta)** | **0** |  |  |  |
| **x** | **1** |  | **u** |  |
| **x** |  |  |  |  |
| **x**  **( )** |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| **ln x** |  |  | **ln u** |  |
|  |  |  |  |  |
| **sin x** | **cos x** |  | **sin u** | **cos u** |
| **cos x** | **- sin x** |  | **cos u** | **- sin u** |
| **tg x** |  | **cos x** | **tg u (cos u )** |  |
| **ctg x** | **-** | **sin x** | **ctg u (sin u )** |  |
| **arcsin x** |  | **(-1;1)** | **arcsin u** |  |
| **arccos x** | **-** | **(-1;1)** | **arccos u** |  |
| **arctg x** |  |  | **arctg u** |  |
| **arcctg x** | **-** |  | **arcctg u** |  |

# ****Operácie s derivovateľnými funkciami****

****

****

****

****

** ( c = konštanta)**

****

****

****

# ****Závery****

**Štúdium funkcií vo všeobecnosti, a najmä spojitých, derivovateľných funkcií, si vyžaduje rozvoj všeobecných a špecifických zručností, ktoré sa odrážajú v:**

**Grafická/vizuálna identifikácia vlastností číselnej funkcie, pokiaľ ide o: ohraničenosť, spojitosť, asymptotickú tendenciu, derivovateľnosť;**

**Spojenie údajov získaných z problémovej situácie s vlastnosťami študovaných numerických funkcií, ako sú: teorémy konvergencie, limitné operácie, typové limity, derivačné tabuľky;**

**Aplikácia špecifických algoritmov, diferenciálny výpočet, pri riešení niektorých problémov a modelovaní niektorých špecifických procesov, niektoré oblasti činnosti;**

**Vyjadrenie konkrétnych tvrdení v jazyku matematickej analýzy, ktoré možno modelovať pomocou numerických funkcií;**

**Interpretácia vlastností niektorých funkcií na základe grafického čítania, ktoré predstavujú príklady z ekonomickej, sociálnej a vedeckej oblasti;**

**Experimentálne overenie výsledkov odvodených výpočtom pre praktické problémy, ktoré možno vyjadriť matematicky;**

**Určenie určitého situačného optima pomocou diferenciálneho počtu v praktických alebo špecifických problémoch niektorých oblastí činnosti.**

**Užitočné aplikácie derivácie funkcie**

**určenie intervalov monotónnosti pre danú funkciu (či je funkcia rastúca alebo klesajúca) - to sa robí skúmaním znamienka prvej derivácie funkcie;**

**určenie extrémnych bodov pre rozšírenú triedu číselných funkcií - to sa vykonáva skúmaním znamienka prvej derivácie funkcie;**

**teoretické výsledky o monotónnosti a extrémnych bodoch funkcie umožňujú získať niektoré nerovnosti, ktoré by sa pomocou elementárnych metód ťažko dokazovali;**

**určenie intervalov konvexnosti alebo konkávnosti funkcie - to sa robí skúmaním znamienka druhej derivácie funkcie;**

**pomocou derivácie je možné určiť poradie násobnosti koreňov polynomickej rovnice alebo intervalov, v ktorých sa nachádzajú korene rovnice spojenej s polynomickou funkciou.**

# ****Zdroje****

**Gheorghe Cârjă, Ovidiu Cârjă - Analiză matematică, Culegere de probleme rezolvate şi comentate, Editura GIL, Zalău, 2003;**

**Lia Aramă, Toader Morozan - Culegere de probleme de analyză matematică, Editura Universal Pan, Bucureşti, 1997;**

**Marius Burtea, Georgeta Burtea - Matematică, manual pentru clasa a XI-a, Editura Carminis, Piteşti, 2006;**

**Mircea Ganga - Probleme rezolvate din manualele de matematică pentru clasa a XI-a, Editura MATHPRESS, Ploieşti, 2006.**

# Pracovný hárok

1. Nech je f : R → R, f(x)=-3+5
2. Výpočet
3. Vypočítajte f'(x)
4. Vypočítajte f'(-1) + f''(-1)
5. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f s abscisovým bodom
6. Výpočet
7. Výpočet
8. Určte intervaly monotónnosti a krajné body funkcie f.
9. Určite inflexný bod